Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК: 517.588: 519.632 На правах рукописи

РЫСҚАН АЙНҰР РЫСҚАНҚЫЗЫ

Многомерные гипергеометрические функции и их применение к решению краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Бердышев Абдумаувлен
КазНПУ им. Абая,
Алматы, Казахстан

Зарубежный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Хасанов Анварджан
ИМ им. В.И. Романовского АН РУ,
Ташкент, Узбекистан

Республика Казахстан
Алматы, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Гипергеометрические функции занимают особую нишу в классе специальных функций [1, 2]. Часто решения различных задач математики, физики, механики, экономики выражаются посредством определенных интегралов, содержащих специальные функции. Но не всегда эти интегралы представляется возможным решить с помощью известных алгоритмов, так как подынтегральные функции зачастую зависят от одного или нескольких параметров. Это приводит к вычислению огромного количества сложных интегралов. В подобных случаях возможностей современной вычислительной техники и численных методов недостаточно. Тогда становится целесообразным представить интеграл через сходящийся бесконечный ряд или произведение. Многими подынтегральными специальными функциями являются обобщенные гипергеометрические ряды. Частными случаями таких гипергеометрических рядов являются ряды Тейлора для синуса, косинуса, логарифма, экспоненты и степенной функции.

Изучение свойств гипергеометрических функций имеет большое значение, так как гипергеометрические функции широко применяются в исследовании разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. С целью разложения гипергеометрических функций Дж.Берчнеллом и Т.Ченди были введены взаимообратные операторы [3-5], с помощью которых для функций Аппелля и Куммера были получены формулы разложения. Основные разложения опубликованы в работе [2, р. 243]. В дальнейшем А.Хасановым и Х.М.Сриваставой были введены многомерные аналоги операторов Берчнелла-Ченди, а также с их помощью построены формулы разложения для обобщенных гипергеометрических функций и многомерных гипергеометрических функций Лауричеллы [6-8]. Также для разложения гипергеометрических функций двух переменных Дж. Чой и А.Хасановым были введены специальные взаимообратные операторы [9,10].

В предлагаемом диссертационном исследовании рассматривается четырехмерное вырождающееся дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, для него строятся фундаментальные решения, строятся решения краевых задач, которые выражены четырехмерными гипергеометрическими функциями. Используя преобразования и операторный метод, гипергеометрические ряды четырех аргументов представляются как произведение нескольких гипергеометрических рядов, зависящих от меньшего количества переменных и параметров. Для решения краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в конечной области требуется построение функции Грина, которое представляется фундаментальным решением. Таким образом, исследование свойств гипергеометрических функций четырех переменных и применение их в исследовании разрешимости краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений, обуславливают **актуальность** настоящей темы диссертации.

Вырождающиеся дифференциальные уравнения относятся к неклассическим уравнениям математической физики, являются относительно новым направлением в изучении дифференциальных уравнений с частными производными. Многие ученые проявляют интерес к вырождающимся дифференциальным уравнениям в связи с прикладным значением задач, в которых появляются такие уравнения. Первые фундаментальные результаты для дифференциальных уравнений смешанного типа, в исследовании которых участвовала гипергеометрическая функция Гаусса, принадлежат Ф. Трикоми [11]. Далее приложения задачи Трикоми развивал Ф.И. Франкль [12], а А.В.Бицадзе сформулировал принцип экстремума для задачи Трикоми [13-15]. С.Геллерстедт [16-18] решает краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения двух переменных с помощью построенной теории потенциала. При исследовании разрешимости задач, возникающих, например, в движении жидкости в открытом канале, в теории оболочек или газовой динамики, участвуют вырождающиеся дифференциальные уравнения. Теория вырождающихся уравнений с частными производными второго порядка получила развитие в трудах М.М.Смирнова, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, Ш.А.Алимова, Т.Ш.Кальменова, Е.И.Моисеева, А.П.Солдатова, С.А.Алдашева, М.Мирсабурова, А.Х.Хасанова, А.К.Уринова, А.С.Бердышева, Ж.Н.Тасмамбетова и их последователей [19-36].

Проведенный обзор и анализ степени изученности вопросов, рассматриваемых в предлагаемой диссертации, показал, что в течение последнего столетия развитие теории гипергеометрических функций очень прогрессировало. Гипергеометрические функции применяются в решении дифференциальных уравнений огромного спектра задач, например, они используются в математической физике, задачах теплопроводности и некоторых разделах небесной механики, построении потенциалов, элементах математической статистики, изучении электромагнитных колебаний, и аэродинамики, теориях связи и суперструн, также встречаются в прикладных задачах квантовой химии и газовой динамики, приложениях квантовой теории поля и астрономии [37-51], и т.д. Изучены свойства гипергеометрических функций нескольких переменных, для целого ряда функций получены формулы интегрального представления, формулы разложения, смежных соотношений и аналитического продолжения. А.Х.Хасанов в 1982 году построил фундаментальные решения для обобщенного двуосесимметричного уравнения Гельмгольца, построил решения краевых задач D и N для указанного уравнения методом разделения переменных в бесконечной области. Д. Аманов для вырождающегося уравнения смешанного типа двух аргументов построил фундаментальные решения, выражающиеся через функцию Горна, решил краевые задачи в неограниченной области [52]. А.Х. Хасановым были решены известные краевые задачи для разных уравнений эллиптического типа с вырождениями [53-56]. А.Х. Хасановым, Э.Т.Каримовым, А.К. Уриновым для эллиптических уравнений трех аргументов, содержащих сингулярные коэффициенты, были построены фундаментальные решения, построены решения краевых задач [57-59]. Т.Г. Эргашевым были построены потенциалы двойного слоя для обобщенного двухосного уравнения Гельмгольца [60-62].

Целью диссертации является построение фундаментальных решений уравнения Геллерстедта от четырех переменных и исследование корректной разрешимости краевых задач.

Объектом исследования выступают гипергеометрические функции от четырех переменных и вырождающееся уравнение эллиптического типа Геллерстедта.

Предметом исследования является применение гипергеометрических функций от четырех переменных в построении решений краевых задач для вырождающегося уравнения эллиптического типа (H).

Задачи диссертационного исследования:

– получение линейно независимых решений дифференциальных систем уравнений для ряда гипергеометрических функций четырех переменных;

– получение формул разложения гипергеометрических функций четырех переменных;

– построение фундаментальных решений вырождающегося эллиптического уравнения в R_+^4;

– постановка и исследование вопросов разрешимости краевых задач для уравнения с вырождениями (H) в неограниченной области;

– постановка и исследование задач для уравнения (H) со смешанными условиями Дирихле и Неймана в неограниченной области;

– решение краевой задачи N для вырождающегося уравнения (H) в ограниченной области.

Положения, выносимые на защиту:

1) Построены линейно независимые решения дифференциальных систем уравнений для некоторых гипергеометрических функций четырех переменных.

2) Доказаны операторные тождества и формулы разложения для некоторых гипергеометрических рядов Гаусса от четырех аргументов с помощью взаимообратных пар операторов Берчнелла-Ченди $\nabla_{x,y}(c)$ и $\Delta_{x,y}(c)$, Хасанова-Сриваставы $\tilde{\nabla}_{x;y,z,t}(c)$ и $\tilde{\Delta}_{x;y,z,t}(c)$, Чой-Хасанова $\mathrm{H}(a,b)$ и $\overline{\mathrm{H}}(a,b)$.

3) Построено шестнадцать фундаментальных решений четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения в явном виде.

4) Разработан метод построения краевых задач для четырехмерного обобщенного уравнения Геллерстедта в бесконечной области. Доказаны теоремы единственности и существования решения краевых задач.

5) Доказана теорема единственности решения задачи N в конечной области. Построена функция Грина задачи N. Получено явное решение задачи.

Методы исследования. В ходе реализации цели и задач диссертационного исследования будут применены качественные свойства гипергеометрических рядов многих переменных, классические методы дифференциальных уравнений с частными производными, методы интегрального исчисления, операционные методы, метод интегралов энергии и принцип экстремума, метод функции Грина, метод преобразования Меллина, операторные методы Берчнелла-Ченди и Чой-Хасанова.

Научная новизна исследования.

1. Для ряда четырехмерных гипергеометрических функций решены системы дифференциальных гипергеометрических уравнений, найдены линейно независимые решения соответствующих систем в явном виде.

2. Получены формулы разложения для некоторых гипергеометрических функций от четырех переменных с помощью различных операторов.

3. Впервые построены фундаментальные решения вырождающегося эллиптического уравнения Геллерстедта четырех аргументов, с помощью которых решен ряд краевых задач в неограниченной области. В ограниченной области сформулирована задача N, доказана единственность решения для задачи N, построена функция Грина задачи и доказано существование решения данной задачи в явном виде.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации подтверждается публикацией основных результатов в изданиях, входящих в международные наукометрические базы; также это подтверждается применением известных классических методов, применяемых в теории дифференциальных уравнений с частными производными; последовательным обоснованием и доказательством каждого полученного результата; для работы с гипергеометрическими функциями нескольких переменных использованы апробированные алгоритмы и методы, верифицированные и опубликованные в фундаментальных трудах теории гипергеометрических функций.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Тема диссертационного исследования имеет теоретическую направленность. Результаты, связанные с изучением свойств гипергеометрических функций, пополнят базу знаний теории специальных функций. Остальные полученные результаты могут быть применены в теории краевых задач для уравнений эллиптического типа с вырождениями.

Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами. Предлагаемая диссертация выполнена в рамках:

1) проекта программы грантового финансирования фундаментальных и прикладных научных исследований МОН РК на 2018-2020гг. «Математическое моделирование динамики упруго-деформируемых пористых сред с учетом частотной зависимости коэффициента трения (с памятью)» № AP05131026;

2) грантового финансирования Казахского национального педагогического университета имени Абая на 2020г. «Разработка методов построения решения краевых задач для четырехмерных вырождающихся уравнений эллиптического типа» Договор №3 от 05.01.2020г.

Апробация работы. В течение проведения исследований по теме диссертации, полученные промежуточные результаты были обсуждены на семинарах и конференциях. Таким образом, были опубликованы тезисы и статьи в сборниках материалов научных конференций, из которых 11 международные, 2 республиканские, 1 работа опубликована в сборнике трудов семинара «Проблемы прикладной математики и информатики», было принято участие в научном семинаре КазНПУ им. Абая и МУИТ «Дифференциальные уравнения математической физики».

Публикации. Результаты по теме диссертации были оформлены в виде 21 публикации, из которых 3 статьи были опубликованы в рейтинговых международных журналах, относящихся к международным наукометрическим базам, 3 – в журналах, рекомендуемых КОКСОН МОН РК, 1 – в журнале, входящем в базу РИНЦ, 14 тезисов и статей, опубликованных в собраниях результатов международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа изложена на 107 страницах, состоит из введения, четырех разделов с подразделами, заключения и списка использованных источников.

Основное содержание диссертации. Во **введении** приведена краткая хронология этапов развития теорий вырождающихся эллиптических уравнений и гипергеометрических функций, описано современное состояние объекта и предмета настоящего исследования. Изложены актуальность и новизна темы диссертации на текущий момент, поставлена цель и сформулированы задачи работы, указаны методы исследования, обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, теоретическая и практическая значимость, апробация и публикации основных результатов.

Первый раздел состоит из четырех подразделов. В первом подразделе приводятся известные определения, свойства, формулы и предварительные сведения о гипергеометрических функциях. Во втором подразделе приводятся первые результаты диссертационного исследования: даны определения систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для ряда четырехмерных гипергеометрических функций и находятся их линейно независимые решения. В третьем и четвертом подразделах приведены операторные тождества и формулы разложения гипергеометрических функций четырех переменных с применением разных операторов, справедливость операторных тождеств доказывается с помощью преобразования Меллина и интеграла Меллина-Бернса, справедливость формул разложения доказывается с помощью операторных тождеств.

Второй раздел посвящен построению фундаментальных решений дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя гиперплоскостями вырождения. Получено шестнадцать фундаментальных решений, которые выражаются гипергеометрическими функциями Лауричеллы. Также доказана теорема о свойствах фундаментальных решений, где применяются формулы дифференцирования, автотрансформации и формула разложения, представляющая гипергеометрическую функцию нескольких переменных как произведение функций Гаусса одной переменной.

В третьем разделе в бесконечной области сформулированы краевые задачи для эллиптического уравнения с несколькими вырождениями, приведены доказательства теорем существования и единственности решения поставленных задач, в явной форме выписаны их решения. Теорема единственности решения задач с краевыми условиями Дирихле доказывается посредством принципа экстремума. Чтобы доказать единственность решения краевой задачи N^{∞} применяется метод интегралов энергии.

Четвертый раздел посвящен решению краевой задачи N для вырождающегося уравнения (H) в ограниченной области. Приведено доказательство теоремы единственности решения краевой задачи N. Построена функция Грина задачи N. Доказана теорема существования решения задачи N в явном виде.

В заключении приведены полученные в ходе диссертационного исследования основные результаты и сделаны выводы по ним.

1 СВОЙСТВА ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе приводятся определения, формулы и основные положения теории гипергеометрических функций, которые будут использоваться в настоящей диссертации. Кроме того будут определены системы дифференциальных уравнений с частными производными для гипергеометрических функций четырех переменных и даны их явные линейно независимые решения. Далее будут доказаны операторные тождества и формулы разложения некоторых гипергеометрических функций от четырех аргументов по произведениям известных гипергеометрических функций Гаусса, из списка Горна, Сарана, Лауричеллы, для этой цели будут использоваться взаимообратные пары операторов $\mathrm{H}(a,b)$ и $\overline{\mathrm{H}}(a,b)$, $\nabla_{x,y}(c)$ и $\Delta_{x,y}(c)$, $\tilde{\nabla}_{x;y,z,t}(c)$ и $\tilde{\Delta}_{x;y,z,t}(c)$.

1.1 Основные понятия и предварительные сведения

Гипергеометрическая функция Гаусса одной переменной имеет следующий вид

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_m\,m!}x^m,\ \ \gamma\neq 0,-1,-2,..,\tag{1.1.1}$$

где $(\lambda)_n$ – символ Похгаммера [63, с.183] имеет определение:

$$(\lambda)_n=\begin{cases}1, & \text{если }\ n=0,\\ \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1), & \text{если }\ n=1,2,3,...\ .\end{cases}\tag{1.1.2}$$

Символ Похгаммера $(\lambda)_n$ также называется факториальной функцией.

Факториальная функция $(\lambda)_n$ в терминах гамма-функции имеет вид:

$$(\lambda)_n=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)},\ \ \lambda\neq 0,-1,-2,...\tag{1.1.3}$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, определяющаяся формулой

$$\Gamma(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}t^{z-1}e^{-t}dt, & \mathrm{Re}(z)>0,\\ \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}, & \mathrm{Re}(z)<0;\ z\neq -1,-2,-3,....\end{cases}\tag{1.1.4}$$

Для гамма-функции $\Gamma(z)$ справедлива формула удвоенного аргумента [63, с.19]

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{1.1.5}$$

Приведем некоторые свойства и тождества для гамма-функции и символа Похгаммера:

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)} = (-1)^n(-\lambda)_n, \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}, \ \alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, ..., \tag{1.1.7}$$

$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda)_m(\lambda+m)_n, \tag{1.1.8}$$

$$(\lambda)_{n-k} = \frac{(-1)^k(\lambda)_n}{(1-\lambda-n)_k}, \ 0 \le k \le n, \tag{1.1.9}$$

$$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!}, & 0 \le k \le n; \\ 0, & k > n. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Функция Гаусса (1.1.1) является решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$x(1-x)\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right]\frac{du}{dx} - \alpha\beta u = 0, \tag{1.1.11}$$

где α, β, γ - const это параметры уравнения и не зависят от переменной x. Уравнение (1.1.11) называется гипергеометрическим уравнением Гаусса, имеет не более трех особых точек, ими являются 0, ∞, 1 [63, с. 69].

Гипергеометрическая функция Гаусса (1.1.1) также имеет интегральное представление [63, с. 72]

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\,dt, \tag{1.1.12}$$
$$\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\beta > 0.$$

Предположим, в равенстве (1.1.12) $x=1$, тогда правая часть выражения станет бета интегралом [63, с. 73], то есть

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0,\ \gamma\neq 0,-1,-2,\dots. \tag{1.1.13}$$

Другая запись интегрального представления для гипергеометрической функции Гаусса была введена учеными Э.В. Бернсом [1, p. 39] и Я. Меллином с помощью формулы преобразования [63, с. 90]

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds, \quad \left|\arg(-x)\right|<\pi, \tag{1.1.14}$$

где $s=0,\ 1,\ 2,\ \dots$

Для гипергеометрических функций одной переменной справедлива формула автотрансформации Больца [63, с. 113]

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta;\gamma;x)&=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right), \\ &=(1-x)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta;\gamma;\frac{x}{x-1}\right). \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

Сходимость гипергеометрического ряда (1.1.1). Используя признак сходимости Раабе, можно сделать следующие выводы:

- при $|x|<1$ ряд сходится,
- при $|x|=1$ абсолютно сходится, если $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<0$,
- при $|x|=1$, $x\neq 1$ условно сходится, если $0\leq \mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<1$,
- при $|x|=1$ расходится, если $1\leq \mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma)$.

Для дифференцирования гипергеометрической функции Гаусса используются следующие формулы дифференцирования:

$$\frac{d^n}{dx^n}F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}F(\alpha+n,\beta+n;\gamma+n;x), \tag{1.1.16}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n-1}F(\alpha,\beta;\gamma;x)\right]=(\alpha)_n x^{\alpha-1}F(\alpha+n,\beta;\gamma;x), \tag{1.1.17}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma-1}F(\alpha,\beta;\gamma;x)\right]=(\gamma-n)_n x^{\gamma-1-n}F(\alpha,\beta;\gamma-n;x). \tag{1.1.18}$$

Я. Горн исследовал гипергеометрические ряды второго порядка, был установлен список, в который вошли 34 сходящихся ряда, из которых 14 полных рядов и 20 вырожденных гипергеометрических рядов от двух переменных второго порядка. Исследования гипергеометрических функций двух переменных описаны в работах [64-72].

Первые четыре ряда из списка Горна, как обобщения функции Гаусса двух переменных, были определены Аппелем в 1880 году [63, с. 219]:

$$F_1(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n,\quad \max\left[|x|,|y|\right]<1, \tag{1.1.19}$$

$$F_2(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n m!n!}x^m y^n,\quad |x|<1,\ |y|<1, \tag{1.1.20}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^m y^n,\quad \max\left[|x|,|y|\right]<1, \tag{1.1.21}$$

$$F_4(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n m!n!}x^m y^n,\quad \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}<1. \tag{1.1.22}$$

Функции Аппеля двух аргументов (1.1.19) – (1.1.22) удовлетворяют соответствующим системам дифференциальных уравнений в частных производных [1, с. 42]. Так, например, функция F_2, удовлетворяет следующей системе дифференциальных гипергеометрических уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} x(1-x)\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}-xy\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y}+\left[\gamma-(\alpha+\beta_1+1)x\right]\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\beta_1 y\dfrac{\partial F_2}{\partial y}-\alpha\beta_1 F_2=0, \\ y(1-y)\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}-xy\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial y}+\left[\gamma-(\alpha+\beta_2+1)y\right]\dfrac{\partial F_2}{\partial y}-\beta_2 x\dfrac{\partial F_2}{\partial x}-\alpha\beta_2 F_2=0. \end{cases} \tag{1.1.23}$$

В 1893 году Дж. Лауричелла ввел многомерные гипергеометрические функции $F_A^{(n)}$, $F_B^{(n)}, F_C^{(n)}$, $F_D^{(n)}$ от n переменных [1, с. 114; 73], как обобщения гипергеометрической функции Аппеля от двух переменных:

$$F_A^{(n)}\left(\alpha;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\beta_2)_{m_2}...(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}...(\gamma_n)_{m_n}\,m_1!m_2!...m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n},\quad \sum_{i=1}^{n}|x_i|<1, \tag{1.1.24}$$

$$F_B^{(n)}\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\gamma;x_1,x_2,...,x_n\right)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m_1}(\alpha_2)_{m_2}...(\alpha_n)_{m_n}(\beta_1)_{m_1}(\beta_2)_{m_2}...(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}\,m_1!m_2!...m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n},\ |x_i|<1,\ i=1,2,...,n, \tag{1.1.25}$$

$$F_C^{(n)}\left(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta)_{m_1+m_2+...+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1}(\gamma_2)_{m_2}...(\gamma_n)_{m_n}\,m_1!m_2!...m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n},\quad \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}<1, \tag{1.1.26}$$

$$F_D^{(n)}\left(\alpha;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\gamma;x_1,x_2,...,x_n\right)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\beta_2)_{m_2}...(\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}\,m_1!m_2!...m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n},\ |x_i|<1,\ i=1,2,...,n. \tag{1.1.27}$$

В случае, когда все переменные в функции (1.1.27) принимают значение 1, справедливо равенство [1, с.117]:

$$F_D^{(n)}\left(a;b_1,b_2,b_3,...,b_n;c;1,1,...,1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b_1-b_2-...-b_n)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b_1-b_2-...-b_n)},$$
$$n=1,2,\ldots,\qquad \operatorname{Re}(c-a-b_1-b_2-...-b_n)>0,\ c\neq 0,-1,-2,\ldots \tag{1.1.28}$$

Каждая из гипергеометрических функций $F_A^{(n)}$, $F_B^{(n)}$, $F_C^{(n)}$, $F_D^{(n)}$ удовлетворяет системе дифференциальных гипергеометрических уравнений. Приведем следующую систему гипергеометрических уравнений, которой удовлетворяет функция $F_A^{(n)}$ [1, с.117]:

$$x_j(1-x_j)\frac{\partial^2 F_A^{(n)}}{\partial x_j^2}-x_j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}x_k\frac{\partial^2 F_A^{(n)}}{\partial x_k\partial x_j}+\left[\gamma_j-(\alpha+\beta_j+1)x_j\right]\frac{\partial F_A^{(n)}}{\partial x_j}-$$
$$-\beta_j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}x_k\frac{\partial F_A^{(n)}}{\partial x_k}-\alpha\beta_jF_A^{(n)}=0,\ j=1,2,...n. \tag{1.1.29}$$

Уравнения (1.1.29) имеют 2^n линейно-независимых решений

$$F_A^{(n)}\left(\alpha;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n;\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right),$$
$$x_1^{1-\gamma_1}F_A^{(n)}\left(\alpha+1-\gamma_1;\beta_1+1-\gamma_1,\beta_2,...,\beta_n;2-\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right),$$

....

$$x_n^{1-\gamma_n} F_A^{(n)}\left(\alpha+1-\gamma_n;\beta_1,\beta_2,...,\beta_n+1-\gamma_n;\gamma_1,\gamma_2,...,2-\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right) \quad (1.1.30)$$

$$x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} F_A^{(n)}\left(\alpha+2-\gamma_1-\gamma_2;\beta_1+1-\gamma_1,\beta_2+1-\gamma_2,...,\beta_n;2-\gamma_1,2-\gamma_2,...,\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right),$$

....

$$x_1^{1-\gamma_1} x_2^{1-\gamma_2} ... x_n^{1-\gamma_n} F_A^{(n)}\left(\alpha+n-\gamma_1-\gamma_2-...-\gamma_n;\right.$$
$$\left.\beta_1+1-\gamma_1,\beta_2+1-\gamma_2,...,\beta_n+1-\gamma_n;\, 2-\gamma_1,2-\gamma_2,...,2-\gamma_n;x_1,x_2,...,x_n\right).$$

В частности, Дж. Лауричелла исследовал свойства гипергеометрических функций $F_A^{(3)}$, $F_B^{(3)}$, $F_C^{(3)}$ и $F_D^{(3)}$ от трех переменных. Затем в 1954 году Ш.Саран определил в явном виде и получил некоторые важные свойства десяти гипергеометрических функций от трех переменных. Таким образом, Ш.Саран завершил изучение свойств функций трех переменных Лауричеллы [74, 75]. Затем Х.М.Сривастава [76-78] определил еще три гипергеометрические функции от трех аргументов. В работе [72, с. 41] приведен наиболее полный список определений гипергеометрических функций трех переменных, описана область сходимости для 205 трехмерных гипергеометрических функций.

Для функции Лауричеллы $F_A^{(r)}$ многих аргументов достоверна следующая формула разложения [6, с. 117]:

$$F_A^{(r)}\left[a,b_1,\ldots,b_r;c_1,\ldots,c_r;x_1,\ldots,x_r\right]=\sum_{m_2,\ldots,m_r=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_2+\ldots+m_r}(b_1)_{m_2+\ldots+m_r}(b_2)_{m_2}\cdots(b_r)_{m_r}}{m_2!\cdots m_r!(c_1)_{m_2+\ldots+m_r}(c_2)_{m_2}\cdots(c_r)_{m_r}}\times$$
$$\times x_1^{m_2+\cdots+m_r}x_2^{m_2}\cdots x_r^{m_r}\,{}_2F_1\left(a+m_2+\ldots+m_r,b_1+m_2+\cdots+m_r;c_1+m_2+\cdots+m_r;x_1\right)\times \quad (1.1.31)$$
$$\times F_A^{(r-1)}\left[a+m_2+\cdots+m_r,b_2+m_2,\ldots,b_r+m_r;c_2+m_2,\ldots,c_r+m_r;x_2,\ldots,x_r\right]$$
$$\left(r\in\mathbb{N}\setminus\{1\};\mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}\right).$$

Формула (1.1.31) для функции $F_A^{(r)}$ при $n=3$ будет иметь вид:

$$F_A^{(3)}\left(a,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)=\sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\infty}\frac{(a)_{n_1+n_2+n_3}(b_1)_{n_1+n_2}(b_2)_{n_1+n_3}(b_3)_{n_2+n_3}}{n_1!n_2!n_3!(c_1)_{n_1+n_2}(c_2)_{n_1+n_3}(c_3)_{n_2+n_3}}\times$$
$$\times x^{n_1+n_2}y^{n_1+n_3}z^{n_2+n_3}\,{}_2F_1\left(a+n_1+n_2,b_1+n_1+n_2;c_1+n_1+n_2;x\right)\times \quad (1.1.32)$$
$$\times\,{}_2F_1\left(a+n_1+n_2+n_3,b_2+n_1+n_3;c_2+n_1+n_3;y\right)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(a+n_1+n_2+n_3,b_3+n_2+n_3;c_3+n_2+n_3;z\right).$$

В 1976 году А. Экстон определил полные гипергеометрические функции от четырех переменных $K_1, K_{21},\ldots,K_{21}$, всего их 21 [79, 80]. В статье [81] Ч.Шарма и Ч.Л. Парихар вводят 83 гипергеометрические функции четырех переменных $F_1^{(4)},F_2^{(4)},\ldots,F_{83}^{(4)}$. Следует отметить, что 19 из этих функций встречались в работе А. Экстона, но в иных обозначениях:

$$
\begin{aligned}
&F_{9}^{(4)}=K_{1}, \quad F_{1}^{(4)}=K_{2}, \quad F_{38}^{(4)}=K_{3}, \quad F_{10}^{(4)}=K_{4}, \quad F_{2}^{(4)}=K_{5}, \\
&F_{59}^{(4)}=K_{6}, \quad F_{39}^{(4)}=K_{7}, \quad F_{11}^{(4)}=K_{8}, \quad F_{12}^{(4)}=K_{9}, \quad F_{3}^{(4)}=K_{10}, \\
&F_{60}^{(4)}=K_{11}, \quad F_{40}^{(4)}=K_{12}, \quad F_{13}^{(4)}=K_{13}, \quad F_{77}^{(4)}=K_{14}, \quad F_{78}^{(4)}=K_{15}, \\
&F_{79}^{(4)}=K_{16}, \quad F_{82}^{(4)}=K_{19}, \quad F_{81}^{(4)}=K_{20}, \quad F_{83}^{(4)}=K_{21}.
\end{aligned} \tag{1.1.33}
$$

Эти функции могут быть применимы в теории относительности Эйнштейна, четырехмерном пространстве и космических исследованиях.

Каждая гипергеометрическая функция четырех переменных представима в форме:

$$
F^{(4)}(\cdot)=\sum_{m,n,p,q}^{\infty} \Delta(m,n,p,q) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
$$

где $\Delta(m,n,p,q)$ это определенная последовательность сложных параметров и каждая функция $F^{(4)}(\cdot)$ имеет свои двенадцать параметров. В рамках данного исследования мы будем рассматривать следующий ряд гипергеометрических функций четырех переменных:

$$
\begin{aligned}
&F_{1}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&\qquad=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(a_2)_q(b)_{m+n+p+q}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
\end{aligned} \tag{1.1.34}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{2}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&\qquad=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{p+q}(b)_{m+n+p+q}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
\end{aligned} \tag{1.1.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{3}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&\qquad=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_p(a_3)_q(b)_{m+n+p+q}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},
\end{aligned} \tag{1.1.36}
$$

$$
F_{4}^{(4)}\left(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n+p+q}(b)_{m+n+q}(c)_p}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.37}
$$

$$F_5^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.38}$$

$$F_6^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_n\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.39}$$

$$F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{p+q}\left(b_1\right)_{m+p}\left(b_2\right)_{n+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.40}$$

$$F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{p+q}\left(b_1\right)_{m+p}\left(b_2\right)_n\left(b_3\right)_q}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p\left(c_4\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.41}$$

$$F_9^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_{m+q}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.42}$$

$$F_{10}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{p+q}\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_{m+p}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.43}$$

$$F_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_p\left(a_3\right)_q\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_{m+p}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}. \tag{1.1.44}$$

$$F_{12}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_p\left(a_3\right)_q\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_{p+q}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.45}$$

$$F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_n\left(a_3\right)_p\left(a_4\right)_q\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_{m+n}\left(c_2\right)_p\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.46}$$

$$F_{14}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n+p}\left(b_2\right)_q}{\left(c_1\right)_{m+q}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.47}$$

$$F_{15}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n+q}\left(b_2\right)_p}{\left(c_1\right)_{m+p}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}. \tag{1.1.48}$$

$$F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p+q}}{\left(c_1\right)_{m+p}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.49}$$

$$F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_{p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_{p+q}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.50}$$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_p\left(b_3\right)_q}{\left(c_1\right)_{m+q}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.51}$$

$$F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_n\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_{m+n}\left(c_2\right)_p\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.52}$$

$$F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_n\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_{n+p}\left(c_3\right)_q}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.53}$$

$$F_{24}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+n}\left(b_2\right)_p\left(b_3\right)_q}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_{n+q}\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}, \tag{1.1.54}$$

$$F_{25}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(a_2\right)_q\left(b_1\right)_{m+q}\left(b_2\right)_n\left(b_3\right)_p}{\left(c_1\right)_{m+q}\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}. \tag{1.1.55}$$

Для гипергеометрической функции Лауричеллы $F_A^{(4)}$ (1.1.24) при $n=4$, используя (1.1.31) и (1.1.32), получаем следующую формулу разложения по произведению простых гипергеометрических функций одной переменной Гаусса:

$$\begin{aligned}
&F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\\
&\sum_{m_2,m_3,m_4,i,j,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_2+m_3+m_4+i+j+k}\left(b_1\right)_{m_2+m_3+m_4}\left(b_2\right)_{m_2+i+j}\left(b_3\right)_{m_3+i+k}\left(b_4\right)_{m_4+j+k}}{\left(c_1\right)_{m_2+m_3+m_4}\left(c_2\right)_{m_2+i+j}\left(c_3\right)_{m_3+i+k}\left(c_4\right)_{m_4+j+k}m_2!m_3!m_4!i!j!k!}\times\\
&\qquad\times x_1^{m_2+m_3+m_4}x_2^{m_2+i+j}x_3^{m_3+i+k}x_4^{m_4+j+k}\times\\
&\times F\left(a+m_2+m_3+m_4,b_1+m_2+m_3+m_4;c+m_2+m_3+m_4;x_1\right)\\
&\times F\left(a+m_2+m_3+m_4+i+j,b_2+m_2+i+j;c_2+m_2+i+j;x_2\right)\\
&\times F\left(a+m_2+m_3+m_4+i+j+k,b_3+m_3+i+k;c_3+m_3+i+k;x_3\right)\\
&\times F\left(a+m_2+m_3+m_4+i+j+k,b_4+m_4+j+k;c_4+m_4+i+k;x_4\right).
\end{aligned} \tag{1.1.56}$$

Также для гипергеометрическкой функции $F_A^{(4)}$ применима формула дифференцирования:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{l_1+l_2+l_3+l_4}}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}\partial z^{l_3}\partial t^{l_4}}F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\frac{(a)_{l_1+l_2+l_3+l_4}\left(b_1\right)_{l_1}\left(b_2\right)_{l_2}\left(b_3\right)_{l_3}\left(b_4\right)_{l_4}}{\left(c_1\right)_{l_1}\left(c_2\right)_{l_2}\left(c_3\right)_{l_3}\left(c_4\right)_{l_4}}\\
&\times F_A^{(4)}\left(a+l_1+l_2+l_3+l_4;b_1+l_1,b_2+l_2,b_3+l_3,b_4+l_4;c_1+l_1,c_2+l_2,c_3+l_3,c_4+l_4;x,y,z,t\right),\\
&l_1,l_2,l_3,l_4\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,...\}.
\end{aligned} \tag{1.1.57}$$

1.2 Линейно независимые решения систем дифференциальных уравнений в частных производных

Для каждой из функций (1.1.34) – (1.1.55) существует соответствующая система дифференциальных гипергеометрических уравнений, которой она удовлетворяет.

Рассмотрим функцию (1.1.35). Согласно теории многомерных гипергеометрических функций, система дифференциальных гипергеометрических уравнений в частных производных второго порядка для гипергеометрической функции $F_2^{(4)}$, которая также является функцией Экстона K_5 в соответствии с (1.1.33), задается следующим образом:

$$\begin{cases} \left(c_1 + x\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+1\right)x^{-1}u - \left(a_1 + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(b + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \\ \left(c_2 + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\dfrac{\partial}{\partial y}+1\right)y^{-1}u - \left(a_1 + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\left(b + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \\ \left(c_3 + z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\dfrac{\partial}{\partial z}+1\right)z^{-1}u - \left(a_2 + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(b + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \\ \left(c_4 + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(t\dfrac{\partial}{\partial t}+1\right)t^{-1}u - \left(a_2 + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\left(b + x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z} + t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

где $u(x,y,z,t) = F_2^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)$.

Проведя в (1.2.1) некоторые элементарные вычисления, мы получаем следующую систему гипергеометрических уравнений:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - y^2u_{yy} - 2xyu_{xy} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - yzu_{yz} - ytu_{yt} + \\ \quad +\left[c_1 - (a_1+b+1)x\right]u_x - (a_1+b+1)yu_y - a_1zu_z - a_1tu_t - a_1bu = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - yzu_{yz} - ytu_{yt} - \\ \quad -(a_1+b+1)xu_x + \left[c_2 - (a_1+b+1)y\right]u_y - a_1zu_z - a_1tu_t - a_1bu = 0, \\ z(1-z)u_{zz} - t^2u_{tt} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - yzu_{yz} - ytu_{yt} - 2ztu_{zt} - \\ \quad -a_2xu_x - a_2yu_y + \left[c_3 - (a_2+b+1)z\right]u_z - (a_2+b+1)tu_t - a_2bu = 0, \\ t(1-t)u_{tt} - z^2u_{zz} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - yzu_{yz} - ytu_{yt} - 2ztu_{zt} - \\ \quad -a_2xu_x - a_2yu_y - (a_2+b+1)zu_z + \left[c_4 - (a_2+b+1)t\right]u_t - a_2bu = 0. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Заметим, что попарно уравнения системы (1.2.2) линейно зависимы, так как $F_2^{(4)}$ удовлетворяет этой системе. Чтобы найти линейно независимые решения системы (1.2.2), рассмотрим u как неизвестную функцию в виде $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta w$ и $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – константы, которые необходимо определить. Таким образом, в системе (1.2.2) подставляя $x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta w$ вместо u, мы получаем следующую систему гипергеометрических уравнений:

$$\begin{cases} x(1-x)w_{xx} - 2xyw_{xy} - xzw_{xz} - xtw_{xt} - y^2w_{yy} - yzw_{yz} - ytw_{yt} + \left[C_1 - (A_1+B+1)x\right]w_x \\ -(A_1+B+1)yw_y - A_1zw_z - A_1tw_t + \left[(c_1+\alpha-1)\alpha x^{-1} - A_1B\right]w = 0, \\ y(1-y)w_{yy} - x^2w_{xx} - 2xyw_{xy} - xzw_{xz} - xtw_{xt} - ytw_{yt} - yzw_{yz} - (A_1+B+1)xw_x \\ +\left[C_2 - (A_1+B+1)y\right]w_y - A_1zw_z - A_1tw_t + \left[(c_2+\beta-1)\beta y^{-1} - A_1B\right]w = 0, \\ z(1-z)w_{zz} - xzw_{xz} - xtw_{xt} - yzw_{yz} - ytw_{yt} - 2ztw_{zt} - t^2w_{tt} - A_2xw_x - A_2yw_y \\ +\left[C_3 - (A_2+B+1)z\right]w_z - (A_2+B+1)tw_t + \left[(c_3+\gamma-1)\gamma z^{-1} - A_2B\right]w = 0, \\ t(1-t)w_{tt} - xzw_{xz} - xtw_{xt} - yzw_{yz} - ytw_{yt} - 2ztw_{zt} - z^2w_{zz} - A_2xw_x - A_2yw_y \\ +\left[C_4 - (A_2+B+1)t\right]w_t - (A_2+B+1)zw_z + \left[(c_4+\delta-1)\delta t^{-1} - A_2B\right]w = 0, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

где

$$A_1 = \alpha+\beta+a_1, \quad A_2 = \gamma+\delta+a_2, \quad B = \alpha+\beta+\gamma+\delta+b,$$
$$C_1 = 2\alpha+c_1, \quad C_2 = 2\beta+c_2, \quad C_3 = 2\gamma+c_3, \quad C_4 = 2\delta+c_4.$$

Следует отметить, что система (1.2.3) аналогична системе (1.2.2). Таким образом, мы полагаем, что следующие условия должны быть удовлетворены:

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1+c_1) = 0, \\ \beta(\beta-1+c_2) = 0, \\ \gamma(\gamma-1+c_3) = 0, \\ \delta(\delta-1+c_4) = 0. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Заметим, что система (1.2.4) удовлетворяет следующим решениям:

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha:$	0	$1-c_1$	0	0	0	$1-c_1$	$1-c_1$	$1-c_1$
$\beta:$	0	0	$1-c_2$	0	0	$1-c_2$	0	0
$\gamma:$	0	0	0	$1-c_3$	0	0	$1-c_3$	0
$\delta:$	0	0	0	0	$1-c_4$	0	0	$1-c_4$

(1.2.5)

	9	10	11	12	13	14	15	16
$\alpha:$	0	0	0	$1-c_1$	$1-c_1$	$1-c_1$	0	$1-c_1$
$\beta:$	$1-c_2$	$1-c_2$	0	$1-c_2$	$1-c_2$	0	$1-c_2$	$1-c_2$.
$\gamma:$	$1-c_3$	0	$1-c_3$	$1-c_3$	0	$1-c_3$	$1-c_3$	$1-c_3$
$\delta:$	0	$1-c_4$	$1-c_4$	0	$1-c_4$	$1-c_4$	$1-c_4$	$1-c_4$

Наконец, подставляя все решения (1.2.5) в (1.2.3), построим в явной форме решения системы (1.2.2) в окрестности точки $x = 0$:

$$u_1(x,y,z,t)=F_2^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_2(x,y,z,t)=x^{1-c_1}F_2^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2,b+1-c_1;2-c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_3(x,y,z,t)=y^{1-c_2}F_2^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2,b+1-c_2;c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_4(x,y,z,t)=z^{1-c_3}F_2^{(4)}(a_1,a_2+1-c_3,b+1-c_3;c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_5(x,y,z,t)=t^{1-c_4}F_2^{(4)}(a_1,a_2+1-c_4,b+1-c_4;c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_6(x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}y^{1-c_2}F_2^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2,b+2-c_1-c_2;2-c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_7(x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}z^{1-c_3}F_2^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2+1-c_3,b+2-c_1-c_3;2-c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_8(x,y,z,t)=$$
$$=x^{1-c_1}t^{1-c_4}F_2^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2+1-c_4,b+2-c_1-c_4;2-c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_9(x,y,z,t)=$$
$$=y^{1-c_2}z^{1-c_3}F_2^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2+1-c_3,b+2-c_2-c_3;c_1,2-c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{10}(x,y,z,t)=$$
$$=y^{1-c_2}t^{1-c_4}F_2^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2+1-c_4,b+2-c_2-c_4;c_1,2-c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{11}(x,y,z,t)=$$
$$=z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_2^{(4)}(a_1,a_2+2-c_3-c_4,b+2-c_3-c_4;c_1,c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{12}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}z^{1-c_3}\times$$
$$\times F_2^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2+1-c_3,b+3-c_1-c_2-c_3;2-c_1,2-c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{13}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_2^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2+1-c_4,b+3-c_1-c_2-c_4;2-c_1,2-c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{14}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}z^{1-c_3}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_2^{(4)}\left(a_1+1-c_1,a_2+2-c_3-c_4,b+3-c_1-c_3-c_4;2-c_1,c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t\right),$$

$$u_{15}(x,y,z,t)=y^{1-c_2}z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_2^{(4)}\left(a_1+1-c_2,a_2+2-c_3-c_4,\right.$$
$$\left.b+3-c_2-c_3-c_4;c_1,2-c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t\right),$$

$$\begin{gathered}u_{16}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_2^{(4)}\left(a_1+2-c_1-c_2,a_2+2-c_3-c_4,\right.\\ \left.b+4-c_1-c_2-c_3-c_4;2-c_1,2-c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t\right).\end{gathered}\tag{1.2.6}$$

Мы получили 16 линейно независимых решений, выраженных через функции гипергеометрического типа четырех аргументов. В совокупности решения (1.2.6) системы (1.2.2) представимы с помощью следующей суммы $u=\sum_{j=1}^{16}k_ju_j$, где $k_i\,(i=1,2,\ldots,16)$ это постоянные.

Аналогично предыдущим вычислениям система дифференциальных гипергеометрических уравнений в частных производных

$$\begin{cases}x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}-ytu_{yt}+\\ \quad+\left[c_1-(a_1+b+1)x\right]u_x-(a_1+b+1)yu_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0,\\ y(1-y)u_{yy}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-x^2u_{xx}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-\\ \quad-(a_1+b+1)xu_x+\left[c_2-(a_1+b+1)y\right]u_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0,\\ z(1-z)u_{zz}-zxu_{xz}-zyu_{yz}-ztu_{zt}-a_2xu_x-a_2yu_y+\\ \quad+\left[c_3-(a_2+b+1)z\right]u_z-a_2tu_t-a_2bu=0,\\ t(1-t)u_{tt}-txu_{xt}-tyu_{yt}-tzu_{zt}-a_3xu_x-a_3yu_y-\\ \quad-a_3zu_z+\left[c_4-(a_3+b+1)t\right]u_t-a_3bu=0,\end{cases}\tag{1.2.7}$$

где функция $u(x,y,z,t)=F_3^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)$ (1.1.36), имеет следующие линейно независимые решения:

$$u_1(x,y,z,t)=F_3^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right),$$

$$u_2(x,y,z,t)=x^{1-c_1}F_3^{(4)}\left(a_1+1-c_1,a_2,a_3,b+1-c_1;2-c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right),$$

$$u_3(x,y,z,t)=y^{1-c_2}F_3^{(4)}\left(a_1+1-c_2,a_2,a_3,b+1-c_2;c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right),$$

$$u_4(x,y,z,t)=z^{1-c_3}F_3^{(4)}\left(a_1,a_2+1-c_3,a_3,b+1-c_3;c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t\right),$$

$$u_5(x,y,z,t)=t^{1-c_4}F_3^{(4)}(a_1,a_2,a_3+1-c_4,b+1-c_4;c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_6(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2,a_3,b+2-c_1-c_2;2-c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_7(x,y,z,t)=x^{1-c_1}z^{1-c_3}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1+1-c,a_2+1-c_3,a_3,b+2-c_1-c_3;2-c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_8(x,y,z,t)=x^{1-c_1}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2,a_3+1-c_4,b+2-c_1-c_4;2-c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_9(x,y,z,t)=y^{1-c_2}z^{1-c_3}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2+1-c_3,a_3,b+2-c_2-c_3;c_1,2-c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{10}(x,y,z,t)=y^{1-c_2}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2,a_3+1-c_4,b+2-c_2-c_4;c_1,2-c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{11}(x,y,z,t)=z^{1-c_3}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_3^{(4)}(a_1,a_2+1-c_3,a_3+1-c_4,b+2-c_3-c_4;c_1,c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{12}(x,y,z,t)=x^{1-c}y^{1-c_2}z^{1-c_3}F_3^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2+1-c_3,a_3,$$
$$b+3-c_1-c_2-c_3;2-c_1,2-c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{13}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}t^{1-c_4}F_3^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2,a_3+1-c_4,$$
$$b+3-c_1-c_2-c_4;2-c_1,2-c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{14}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_3^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2+1-c_3,a_3+1-c_4,$$
$$b+3-c_1-c_3-c_4;2-c_1,c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{15}(x,y,z,t)=y^{1-c_2}z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_3^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2+1-c_3,a_3+1-c_4,$$
$$b+3-c_2-c_3-c_4;c_1,2-c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_{16}(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}z^{1-c_3}t^{1-c_4}F_3^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2,a_2+1-c_3,a_3+1-c_4,$$
$$b+4-c_1-c_2-c_3-c_4;2-c_1,2-c_2,2-c_3,2-c_4;x,y,z,t).$$

А гипергеометрическая функция (1.1.38) $F_5^{(4)}$ удовлетворяет следующей системе гипергеометрических уравнений четырех переменных:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}+\left[c_1-(a_1+b_1+1)x\right]u_x- \\ \qquad -(a_1+b_1+1)yu_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0, \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-yzu_{yz}-(a_1+b_1+1)xu_x+ \\ \qquad +\left[c_2-(a_1+b_1+1)y\right]u_y-b_1zu_z-a_1b_1u=0, \\ z(1-z)u_{zz}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-ztu_{zt}-b_2xu_x-b_2yu_y+ \\ \qquad +\left[c_3-(a_1+b_2+1)z\right]u_z-a_1tu_t-a_1b_2u=0, \\ t(1-t)u_{tt}-ztu_{zt}-a_2zu_z+\left[c_4-(a_2+b_2+1)t\right]u_t-a_2b_2u=0, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

где функция $u(x,y,z,t)=F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)$. Система дифференциальных уравнений (1.2.8) имеет 16 линейно независимых решений:

$$u_1(x,y,z,t)=F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_2(x,y,z,t)=x^{1-c_1}F_5^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2,b_1+1-c_1,b_2;2-c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_3(x,y,z,t)=y^{1-c_2}F_5^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2,b_1+1-c_2,b_2;c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_4(x,y,z,t)=z^{1-c_3}F_5^{(4)}(a_1+1-c_3,a_2,b_1,b_2+1-c_3;c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_5(x,y,z,t)=t^{1-c_4}F_5^{(4)}(a_1,a_2+1-c_4,b_1,b_2+1-c_4;c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_6(x,y,z,t)=x^{1-c_1}y^{1-c_2}F_5^{(4)}(a_1+1-c_2,a_2,b_1+1-c_2,b_2;c_1,2-c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_7(x,y,z,t)=x^{1-c_1}z^{1-c_3}\times$$
$$\times F_5^{(4)}(a_1+2-c_1-c_3,a_2,b_1+1-c_1,b_2+1-c_3;2-c_1,c_2,2-c_3,c_4;x,y,z,t),$$

$$u_8(x,y,z,t)=x^{1-c_1}t^{1-c_4}\times$$
$$\times F_5^{(4)}(a_1+1-c_1,a_2+1-c_4,b_1+1-c_1,b_2+1-c_4;2-c_1,c_2,c_3,2-c_4;x,y,z,t),$$

$$u_9(x,y,z,t) = y^{1-c_2} z^{1-c_3} \times$$
$$\times F_5^{(4)}(a_1+2-c_2-c_3, a_2, b_1+1-c_2, b_2+1-c_3; c_1, 2-c_2, 2-c_3, c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{10}(x,y,z,t) = y^{1-c_2} t^{1-c_4} \times$$
$$\times F_5^{(4)}(a_1+1-c_2, a_2+1-c_4, b_1+1-c_2, b_2+1-c_4; c_1, 2-c_2, c_3, 2-c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{11}(x,y,z,t) =$$
$$z^{1-c_3} t^{1-c_4} F_5^{(4)}(a_1+1-c_3, a_2+1-c_4, b_1, b_2+2-c_3-c_4; c_1, c_2, 2-c_3, 2-c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{12}(x,y,z,t) = x^{1-c_1} y^{1-c_2} z^{1-c_3} F_5^{(4)}(a_1+3-c_1-c_2-c_3, a_2,$$
$$b_1+2-c_1-c_2, b_2+1-c_3; 2-c_1, 2-c_2, 2-c_3, c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{13}(x,y,z,t) = x^{1-c_1} y^{1-c_2} t^{1-c_4} F_5^{(4)}(a_1+2-c_1-c_2, a_2+1-c_4,$$
$$b_1+2-c_1-c_2, b_2+1-c_4; 2-c_1, 2-c_2, c_3, 2-c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{14}(x,y,z,t) = x^{1-c_1} y^{1-c_3} t^{1-c_4} F_5^{(4)}(a_1+2-c_1-c_3, a_2+1-c_4,$$
$$b_1+1-c_1, b_2+2-c_3-c_4; 2-c_1, c_2, 2-c_3, 2-c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{15}(x,y,z,t) = y^{1-c_2} z^{1-c_3} t^{1-c_4} F_5^{(4)}(a_1+2-c_2-c_3, a_2+1-c_4,$$
$$b_1+1-c_2, b_2+2-c_3-c_4; c_1, 2-c_2, 2-c_3, 2-c_4; x,y,z,t),$$

$$u_{16}(x,y,z,t) = x^{1-c_1} y^{1-c_2} z^{1-c_3} t^{1-c_4} F_5^{(4)}(a_1+3-c_1-c_2-c_3, a_2+1-c_4,$$
$$b_1+2-c_1-c_2, b_2+2-c_3-c_4; 2-c_1, 2-c_2, 2-c_3, 2-c_4; x,y,z,t).$$

Таким образом, для любой гипергеометрической функции от четырех переменных, удовлетворяющей соответствующей системе дифференциальных гипергеометрических уравнений в частных производных, можно найти линейно независимые решения систем аналогично функциям $F_2^{(4)}$, $F_3^{(4)}$ и $F_5^{(4)}$.

Запишем системы дифференциальных уравнений в частных производных для других рассматриваемых гипергеометрических функций $F_6^{(4)}$, $F_7^{(4)}$, $F_8^{(4)}$, $F_9^{(4)}$, $F_{10}^{(4)}$ и $F_{11}^{(4)}$, соответственно:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - xyu_{xy} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - ytu_{yt} - ztu_{zt} + \left[c_1 - (a_1+b_1+1)x\right]u_x - \\ \qquad - b_1yu_y - b_1zu_z - a_1tu_t - a_1b_1u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} - yzu_{yz} - b_2xu_x + \left[c_2 - (a_1+b_2+1)y\right]u_y - \\ \qquad - b_2zu_z - a_1b_2u = 0, \\ z(1-z)u_{zz} - xzu_{xz} - yzu_{yz} - xb_3u_x - yb_3u_y + \left[c_3 - (a_1+b_3+1)z\right]u_z - \\ \qquad - a_1b_3u = 0, \\ t(1-t)u_{tt} - xtu_{xt} - a_2xu_x + \left[c_4 - (a_2+b_1+1)t\right]u_t - a_2b_1u = 0, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

где функция $u(x,y,z,t) = F_6^{(4)}$ определяется формулой (1.1.39);

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - xyu_{xy} - xzu_{xz} - yzu_{yz} + \left[c_1 - (a_1+b_1+1)x\right]u_x - \\ \qquad - b_1yu_y - a_1zu_z - a_1b_1u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} - xtu_{xt} - ytu_{yt} - b_2xu_x + \left[c_2 - (a_1+b_2+1)y\right]u_y - \\ \qquad - a_1tu_t - a_1b_2u = 0, \\ z(1-z)u_{zz} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - ztu_{zt} - a_2xu_x - b_1tu_t + \\ \qquad + \left[c_3 - (a_2+b_1+1)z\right]u_z - a_2b_1u = 0, \\ t(1-t)u_{tt} - yzu_{yz} - ytu_{yt} - ztu_{zt} - a_2yu_y - b_2zu_z + \\ \qquad + \left[c_4 - (a_2+b_2+1)t\right]u_t - a_2b_2u = 0, \end{cases} \tag{1.2.10}$$

где $u(x,y,z,t) = F_7^{(4)}$ определяется формулой (1.1.40);

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - xyu_{xy} - xzu_{xz} - yzu_{yz} + \left[c_1 - (a_1+b_1+1)x\right]u_x - \\ \qquad - b_1yu_y - a_1zu_z - a_1b_1u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} - b_2xu_x + \left[c_2 - (a_1+b_2+1)y\right]u_y - a_1b_2u = 0, \\ z(1-z)u_{zz} - xzu_{xz} - xtu_{xt} - ztu_{zt} - a_2xu_x + \left[c_3 - (a_2+b_1+1)z\right]u_z - \\ \qquad - b_1tu_t - a_2b_1u = 0, \\ t(1-t)u_{tt} - ztu_{zt} - b_3zu_z + \left[c_4 - (a_2+b_3+1)t\right]u_t - a_2b_3u = 0, \end{cases} \tag{1.2.11}$$

где $u(x,y,z,t) = F_8^{(4)}$ определяется формулой (1.1.41);

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx}-y^2u_{yy}-z^2u_{zz}-2xyu_{xy}-2xzu_{xz}-2yzu_{yz}+(1-x)tu_{xt}-ytu_{yt}-ztu_{zt}+ \\ +\left[c_1-(a_1+b+1)x\right]u_x-(a_1+b+1)yu_y-(a_1+b+1)zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-z^2u_{zz}-2xyu_{xy}-2xzu_{xz}-2yzu_{yz}-xtu_{xt}-ytu_{yt}-ztu_{zt}- \\ -(a_1+b+1)xu_x+\left[c_2-(a_1+b+1)y\right]u_y-(a_1+b+1)zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ z(1-z)u_{zz}-x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2xyu_{xy}-2xzu_{xz}-2yzu_{yz}-xtu_{xt}-ytu_{yt}-ztu_{zt}- \\ -(a_1+b+1)xu_x-(a_1+b+1)yu_y+\left[c_3-(a_1+b+1)z\right]u_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ t(1-t)u_{tt}+xu_{xt}-xtu_{xt}-ytu_{yt}-ztu_{zt}-a_2xu_x- \\ \qquad -a_2yu_y-a_2zu_z+\left[c_1-(a_2+b+1)t\right]u_t-a_2bu=0, \end{cases} \tag{1.2.12}$$

где $u(x,y,z,t)=F_9^{(4)}$ определяется формулой (1.1.42);

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx}-y^2u_{yy}-2xyu_{xy}+(1-x)zu_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}+ \\ \quad +\left[c_1-(a_1+b+1)x\right]u_x-(a_1+b+1)yu_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}- \\ \quad -(a_1+b+1)xu_x+\left[c_2-(a_1+b+1)y\right]u_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ z(1-z)u_{zz}-t^2u_{tt}+x(1-z)u_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-2ztu_{zt}- \\ \quad -a_2xu_x-a_2yu_y+\left[c_1-(a_2+b+1)z\right]u_z-(a_2+b+1)tu_t-a_2bu=0, \\ t(1-t)u_{tt}-z^2u_{zz}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}-2ztu_{zt}- \\ \quad -a_2xu_x-a_2yu_y-(a_2+b+1)zu_z+\left[c_3-(a_2+b+1)t\right]u_t-a_2bu=0, \end{cases} \tag{1.2.13}$$

где $u(x,y,z,t)=F_{10}^{(4)}$ определяется формулой (1.1.43);

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx}-2xyu_{xy}+z(1-x)u_{xz}-xtu_{xt}-y^2u_{yy}-yzu_{yz}-ytu_{yt}+ \\ \qquad +\left[c_1-(a_1+b+1)x\right]u_x-(a_1+b+1)yu_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ y(1-y)u_{yy}-x^2u_{xx}-2xyu_{xy}-xzu_{xz}-xtu_{xt}-yzu_{yz}-ytu_{yt}- \\ \qquad -(a_1+b+1)xu_x+\left[c_2-(a_1+b+1)y\right]u_y-a_1zu_z-a_1tu_t-a_1bu=0, \\ z(1-z)u_{zz}+x(1-z)u_{xz}-yzu_{yz}-ztu_{zt}-a_2xu_x-a_2yu_y+ \\ \qquad +\left[c_1-(a_2+b)z\right]u_z-a_2tu_t-a_2bu=0, \\ t(1-t)u_{tt}-xtu_{xt}-ytu_{yt}-ztu_{zt}-a_3xu_x-a_3yu_y-a_3zu_z+ \\ \qquad +\left[c_3-(a_3+b)t\right]u_t-a_3bu=0, \end{cases} \tag{1.2.14}$$

где $u(x,y,z,t)=F_{11}^{(4)}$ определяется формулой (1.1.44).

Было найдено по 16 линейно независимых решений для каждой из систем дифференциальных уравнений в частных производных (1.2.9) – (1.2.11) и по 4 линейно независимых решения для систем (1.2.12) – (1.2.14). Полученные решения не приводятся здесь в связи с тем, что достаточно объемны.

В ходе исследования линейно независимых решений систем дифференциальных уравнений в частных производных четырехмерных гипергеометрических функций были опубликованы работы [82-85].

1.3 Формулы разложения гипергеометрических функций четырех переменных с операторами $\mathrm{H}(a,b)$ и $\overline{\mathrm{H}}(a,b)$

Для дальнейшего исследования свойств гипергеометрических функций многих аргументов нам нужны разложения многомерных гипергеометрических функций по произведениям более простых гипергеометрических функций. Для этого будут применены различные пары взаимообратных операторов [86-88].

В 1940 году Дж.Берчнелл и Т.Ченди ввели взаимообратные операторы с целью исследовать свойства двумерных гипергеометрических функций:

$$\nabla_{x,y}(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_x+\delta_y+h)}{\Gamma(h+\delta_x)\Gamma(h+\delta_y)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h)_i\,i!},\tag{1.3.1}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y}(h)&=\frac{\Gamma(h+\delta_x)\Gamma(h+\delta_y)}{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta_x+\delta_y)}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(1-h-\delta_x-\delta_y)_i\,i!},\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(h)_{2i}(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h+i-1)_i(\delta_x+h)_i(\delta_y+h)_i\,i!},\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{x,y}(h)\Delta_{x,y}(g)&=\frac{\Gamma(h)\Gamma(\delta_x+\delta_y+h)}{\Gamma(h+\delta_x)\Gamma(h+\delta_y)}\frac{\Gamma(g+\delta_x)\Gamma(g+\delta_y)}{\Gamma(g)\Gamma(g+\delta_x+\delta_y)},\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(g-h)_i(g)_{2i}(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h)_i(g+i-1)_i(\delta_x+g)_i(\delta_y+g)_i\,i!},\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(h-g)_i(-\delta_x)_i(-\delta_y)_i}{(h)_i(1-g-\delta_x-\delta_y)_i\,i!},\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

где

$$\delta_x=x\frac{\partial}{\partial x},\qquad \delta_y=y\frac{\partial}{\partial y}.\tag{1.3.4}$$

Дж.Берчнелл и Т.Ченди, используя пару взаимно обратных операторов (1.3.1) – (1.3.3) и метод Пул [89, р. 93], представили целый ряд формул разложения. Всего получили 22 пары разложений, из них 9 пар в работе [3, р.

253], 13 пар приведено в работе [4, p. 119], которые содержат гипергеометрические функции Гаусса, Аппеля, вырожденные функции Гумберта. Метод Пул заключается в том, что для любой аналитической функции выполняются тождества:

$$(\delta+\alpha)_n\{f(\xi)\}=(\xi)^{1-\alpha}\frac{d^n}{d\xi^n}\{\xi^{\alpha+n-1}f(\xi)\},$$
$$(-\delta)_n\{f(\xi)\}=(-\xi)^n\frac{d^n}{d\xi^n}\{f(\xi)\}, \tag{1.3.5}$$

где $\delta=\xi\dfrac{d}{d\xi}$; $\alpha\in\mathbb{C}$; $n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$.

Операторы (1.3.1) – (1.3.3) могли применяться только лишь для гипергеометрических функций двух переменных. Однако позже Х.М.Сривастава [77, p.105], Дж.Сингхал и С. Бхати [90] представили трехмерный случай формулы разложения для гипергеометрических функций. Для одного класса гипергеометрических функций четырех переменных А.Экстон [91] получил формулы разложения и интегральные представления.

Для разложения же многомерных гипергеометрических функций А.Хасанов и Х.М.Сривастава ввели пару взаимно обратных символических операторов [8, p. 1120], как многомерный аналог операторов (1.3.1) и (1.3.2) соответственно:

$$\tilde{\nabla}_{x_1;x_2,...,x_r}(h)=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta_1+\delta_2+...+\delta_r)}{\Gamma(h+\delta_1)\Gamma(h+\delta_2+...+\delta_r)}=$$
$$\sum_{k_2,k_3,...,k_r=0}^{\infty}\frac{(-\delta_1)_{k_2+...+k_r}(-\delta_2)_{k_2}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(h)_{k_2+...+k_r}k_2!k_3!\cdots k_r!}, \tag{1.3.6}$$

$$\tilde{\Delta}_{x_1;x_2,...,x_r}(h)=\frac{\Gamma(h+\delta_1)\Gamma(h+\delta_2+...+\delta_r)}{\Gamma(h)\Gamma(h+\delta_1+\delta_2+...+\delta_r)}=$$
$$\sum_{k_2,k_3,...,k_r=0}^{\infty}\frac{(-\delta_1)_{k_2+...+k_r}(-\delta_2)_{k_2}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(1-h-\delta_2-...-\delta_r)_{k_2+...+k_r}k_2!k_3!\cdots k_r!}, \tag{1.3.7}$$

где

$$\delta_{x_j}=x_j\frac{\partial}{\partial x_j},\ j=1,2,..,r,\quad r\in\mathbb{N}=\{1,2,...\}. \tag{1.3.8}$$

Для различных гипергеометрических функций нескольких переменных, в том числе и для многомерных гипергеометрических функций Лауричеллы $F_A^{(n)}$,

$F_B^{(n)}$, $F_C^{(n)}$, $F_D^{(n)}$ А.Хасанов и Х.М.Сривастава [6, p. 117; 8, p. 1122] получили ряд формул разложения в терминах более простых гипергеометрических функций таких, как функции Гаусса и Аппеля.

Для изучения свойств другого класса обобщенных многомерных гипергеометрических функций Дж.Чой и А.Хасанов [9, p. 664] ввели пару взаимно обратных операторов:

$$H_{x_1,\dots,x_r}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\cdots+\delta_r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\cdots+\delta_r)}= \sum_{k_1,\cdots,k_r=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\cdots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(\beta)_{k_1+\cdots+k_r}k_1!\cdots k_r!}, \tag{1.3.9}$$

$$\bar{H}_{x_1,\dots x_r}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\delta_1+\cdots+\delta_r)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\delta_1+\cdots+\delta_r)}= \sum_{k_1,\dots k_r=0}^{\infty}\frac{(\beta-\alpha)_{k_1+\cdots+k_r}(-\delta_1)_{k_1}\cdots(-\delta_r)_{k_r}}{(1-\alpha-\delta_1-\cdots-\delta_r)_{i+j}\,i!\,j!}, \tag{1.3.10}$$

где оператор δ_{x_j} определяется по формуле (1.3.8).

Рассмотрим гипергеометрические функции четырех переменных $F_1^{(4)}$, $F_3^{(4)},\dots,F_6^{(4)}$, $F_8^{(4)}$, $F_{11}^{(4)}$, $F_{13}^{(4)}$, $F_{17}^{(4)}$, $F_{19}^{(4)}$, $F_{20}^{(4)}$, $F_{22}^{(4)},\dots,F_{25}^{(4)}$ для разложения по произведению известных более простых гипергеометрических функций, в которых будут использованы взаимообратные операторы (1.3.9) и (1.3.10).

Теорема 1.3.1. Для гипергеометрических функций от четырех переменных (1.1.34), (1.1.36)-(1.1.39), (1.1.41), (1.1.44), (1.1.46), (1.1.49)-(1.1.55) имеют место следующие операторные тождества:

$$F_1^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)= =H_t(a_2,c_4)(1-t)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right), \tag{1.3.11}$$

$$(1-t)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right)= =\bar{H}_t(a_2,c_4)F_1^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \tag{1.3.12}$$

$$F_3^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)= =H_z(a_2,c_3)H_t(a_3,c_4)(1-t-z)^{-b}F_4\left(a_1,b;c_1,c_2;\frac{x}{1-t-z},\frac{y}{1-t-z}\right), \tag{1.3.13}$$

$$
\begin{aligned}
&(1-t-z)^{-b} F_4\left(a_1,b;c_1,c_2;\frac{x}{1-t-z},\frac{y}{1-t-z}\right)= \\
&\qquad =\bar{H}_z(a_2,c_3)\bar{H}_t(a_3,c_4)F_3^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),
\end{aligned}
\tag{1.3.14}
$$

$$
F_4^{(4)}(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=H_z(c,c_3)(1-z)^{-a}F_C^{(3)}\left(a,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},\frac{t}{1-z}\right), \tag{1.3.15}
$$

$$
(1-z)^{-a}F_C^{(3)}\left(a,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},\frac{t}{1-z}\right)=\bar{H}_z(c,c_3)F_4^{(4)}(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \tag{1.3.16}
$$

$$
F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=H_t(a_2,c_4)(1-t)^{-b_2}F_E\left(a_1;b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,\frac{z}{1-t}\right), \tag{1.3.17}
$$

$$
(1-t)^{-b_2}F_E\left(a_1;b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,\frac{z}{1-t}\right)=\bar{H}_t(a_2,c_4)F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \tag{1.3.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_6^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)= \\
&\qquad =H_y(b_2,c_2)H_z(b_3,c_3)(1-y-z)^{-a_1}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_4;\frac{x}{1-y-z},t\right),
\end{aligned}
\tag{1.3.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-y-z)^{-a_1}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_4;\frac{x}{1-y-z},t\right)= \\
&\qquad =\bar{H}_y(b_2,c_2)\bar{H}_z(b_3,c_3)F_6^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),
\end{aligned}
\tag{1.3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)= \\
&\qquad =H_y(b_2,c_2)H_t(b_3,c_4)(1-y)^{-a_1}(1-t)^{-a_2}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_3;\frac{x}{1-y},\frac{x}{1-y}\right),
\end{aligned}
\tag{1.3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-y)^{-a_1}(1-t)^{-a_2}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_3;\frac{x}{1-y},\frac{x}{1-y}\right)= \\
&\qquad =\bar{H}_y(b_2,c_2)\bar{H}_t(b_3,c_4)F_8^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),
\end{aligned}
\tag{1.3.22}
$$

$$
F_{11}^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=H_t(a_3,c_3)(1-t)^{-b}F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t},\frac{x}{1-t}\right), \tag{1.3.23}
$$

$$
(1-t)^{-b}F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t},\frac{x}{1-t}\right)=\bar{H}_t(a_3,c_3)F_{11}^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t), \tag{1.3.24}
$$

$$F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=H_z\left(a_3,c_2\right)H_t\left(a_4,c_3\right)\left(1-z-t\right)^{-b}F_1\left(b;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-z-t},\frac{y}{1-z-t}\right), \quad (1.3.25)$$

$$\left(1-z-t\right)^{-b}F_1\left(b;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-z-t},\frac{y}{1-z-t}\right)=$$
$$=\bar{H}_z\left(a_3,c_2\right)\bar{H}_t\left(a_4,c_3\right)F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.26)$$

$$F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=H_t\left(a_2,c_3\right)\left(1-t\right)^{-b_2}F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right), \quad (1.3.27)$$

$$\left(1-t\right)^{-b_2}F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right)=\bar{H}_t\left(a_2,c_3\right)F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.28)$$

$$F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=H_{z.t}\left(b_2,c_3\right)\left(1-t\right)^{-a_2}\left(1-z\right)^{-a_1}F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right), \quad (1.3.29)$$

$$\left(1-t\right)^{-a_2}\left(1-z\right)^{-a_1}F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)=$$
$$=\bar{H}_{z.t}\left(b_2,c_3\right)F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.30)$$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=H_z\left(b_2,c_3\right)\left(1-z\right)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right), \quad (1.3.31)$$

$$\left(1-z\right)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right)=$$
$$=\bar{H}_z\left(b_2,c_3\right)F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.32)$$

$$F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=H_z\left(b_3,c_2\right)H_t\left(a_2,c_3\right)\left(1-z\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-b_1}F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right), \quad (1.3.33)$$

$$\left(1-z\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-b_1}F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right)=$$
$$=\bar{H}_z\left(b_3,c_2\right)\bar{H}_t\left(a_2,c_3\right)F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.34)$$

$$F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=H_t\left(a_2,c_3\right)\left(1-t\right)^{-b_1}F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right), \quad (1.3.35)$$

$$\left(1-t\right)^{-b_1}F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right)=\bar{H}_t\left(a_2,c_3\right)F_{23}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \quad (1.3.36)$$

$$\begin{aligned}&F_{24}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\\&\qquad=H_z\left(b_2,c_3\right)\left(1-z\right)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},t,\frac{y}{1-z}\right),\end{aligned} \quad (1.3.37)$$

$$\begin{aligned}&\left(1-z\right)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},t,\frac{y}{1-z}\right)=\\&\qquad=\bar{H}_z\left(b_2,c_3\right)F_{24}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right),\end{aligned} \quad (1.3.38)$$

$$\begin{aligned}&F_{25}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\\&\qquad=H_y\left(b_2,c_2\right)H_z\left(b_3,c_3\right)\left(1-y-z\right)^{-a_1}F_1\left(b_1;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-y-z},t\right),\end{aligned} \quad (1.3.39)$$

$$\begin{aligned}&\left(1-y-z\right)^{-a_1}F_1\left(b_1;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-y-z},t\right)=\\&\qquad=\bar{H}_y\left(b_2,c_2\right)\bar{H}_z\left(b_3,c_3\right)F_{25}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right),\end{aligned} \quad (1.3.40)$$

где F_1, F_2 и F_4 - гипергеометрические функции Аппеля, определения которых выражены формулами (1.1.19), (1.1.20) и (1.1.22), $F_C^{(3)}$ - гипергеометрическая функция Лауричеллы (1.1.26) в случае $n=3$, F_E, F_F, F_R, F_G, - гипергеометрические функции Сарана:

$$F_E\left(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_{p+m+n}\left(\beta_1\right)_{m+n}\left(\beta_2\right)_p}{\left(\gamma_1\right)_m\left(\gamma_2\right)_n\left(\gamma_3\right)_p m!n!p!}x^m y^n z^p, \quad (1.3.41)$$

$$F_F\left(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_{m+n+p}\left(\beta_1\right)_{m+p}\left(\beta_2\right)_n}{\left(\gamma_1\right)_m\left(\gamma_2\right)_{n+p} m!n!p!}x^m y^n z^p, \quad (1.3.42)$$

$$F_R\left(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha_1\right)_{m+p}\left(\alpha_2\right)_n\left(\beta_1\right)_{m+p}\left(\beta_2\right)_n}{\left(\gamma_1\right)_m\left(\gamma_2\right)_{n+p} m!n!p!}x^m y^n z^p, \quad (1.3.43)$$

$$F_G\left(\alpha;\beta_1,\beta_2,\beta_3;\gamma_1,\gamma_2;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_{m+n+p}\left(\beta_1\right)_m\left(\beta_2\right)_n\left(\beta_3\right)_p}{\left(\gamma_1\right)_m\left(\gamma_2\right)_{n+p} m!n!p!}x^m y^n z^p, \quad (1.3.44)$$

Доказательство теоремы 1.3.1. Чтобы доказать справедливость операторных тождеств (1.3.11) – (1.3.40) будет применено преобразование Меллина [92]

$$f^*(s) = \int\limits_0^\infty f(x)x^{s-1}dx, \tag{1.3.45}$$

где функция $f(x)$ оригинал и $f^*(s)$ изображение. В качестве примера, докажем справедливость операторного тождества (1.3.27). На основании формулы (1.1.14) для гипергеометрической функции $F_{17}^{(4)}$ имеет место интегральное представление Меллина-Бернса

$$\begin{gathered}\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)}F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^4}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(a_1+s_1+s_2+s_3)\Gamma(a_2+s_4)\Gamma(b_1+s_1+s_2)\Gamma(b_2+s_3+s_4)}{\Gamma(c_1+s_1+s_3)\Gamma(c_2+s_2)\Gamma(c_3+s_4)}\times \\ \times\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\Gamma(-s_3)\Gamma(-s_4)(-x)^{s_1}(-y)^{s_2}(-z)^{s_3}(-t)^{s_4}\,ds_1ds_2ds_3ds_4.\end{gathered} \tag{1.3.46}$$

Раскроем операторное тождество (1.3.27), запишем его с учетом определения $H_t(a_2,c_3)$ из формулы (1.3.9) в развернутом виде:

$$\begin{gathered}F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \\ = \sum_{i=0}^\infty \frac{(c_3-a_2)_i(-\delta_t)_i}{(c_3)_i\, i!}\sum_{m,n,p,q=0}^\infty \frac{(a_1)_{m+n+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{p+q}}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}.\end{gathered} \tag{1.3.47}$$

Применяя преобразование [92, с.9]

$$(-\delta)_k\, g(x) \leftrightarrow \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(-s)}g^*(s),\ k\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,...\} \tag{1.3.48}$$

к следующему выражению

$$\begin{gathered}\sum_{m,n,p,q=0}^\infty \frac{(a_1)_{m+n+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{p+q}}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!} \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi i)^4}\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\times \\ \times\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(a_1+s_1+s_2+s_3)\Gamma(b_1+s_1+s_2)\Gamma(b_2+s_3+s_4)}{\Gamma(c_1+s_1+s_3)\Gamma(c_2+s_2)}\times \\ \times\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\Gamma(-s_3)\Gamma(-s_4)(-x)^{s_1}(-y)^{s_2}(-z)^{s_3}(-t)^{s_4}\,ds_1ds_2ds_3ds_4,\end{gathered} \tag{1.3.49}$$

определяем

$$
\begin{aligned}
&(-\delta_t)_i \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{p+q}}{(c_1)_{m+p}(c_2)_n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!} \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi i)^4}\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\times \\
&\times\frac{\Gamma(i-s_4)}{\Gamma(-s_4)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a_1+s_1+s_2+s_3)\Gamma(b_1+s_1+s_2)\Gamma(b_2+s_3+s_4)}{\Gamma(c_1+s_1+s_3)\Gamma(c_2+s_2)}\times \qquad (1.3.50)\\
&\times\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\Gamma(-s_3)\Gamma(-s_4)(-x)^{s_1}(-y)^{s_2}(-z)^{s_3}(-t)^{s_4}\,ds_1ds_2ds_3ds_4.
\end{aligned}
$$

Тогда из равенства (1.3.47) с учетом (1.3.48) следует

$$
\begin{aligned}
&F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi i)^4}\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\times \\
&\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a_1+s_1+s_2+s_3)\Gamma(b_1+s_1+s_2)\Gamma(b_2+s_3+s_4)}{\Gamma(c_1+s_1+s_3)\Gamma(c_2+s_2)}\times \qquad (1.3.51)\\
&\times\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\Gamma(-s_3)\Gamma(-s_4)(-x)^{s_1}(-y)^{s_2}(-z)^{s_3}(-t)^{s_4}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-s_4)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\, i!}ds_1ds_2ds_3ds_4.
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-s_4)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\, i!} = F(-s_4,c_3-a_2;c_3;1) = \frac{\Gamma(c_3)\Gamma(a_2+s_4)}{\Gamma(c_3+s_4)\Gamma(a_2)},
$$

то из (1.3.51) в итоге имеем

$$
\begin{aligned}
&F_{17}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi i)^4}\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(c_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\times \\
&\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(a_1+s_1+s_2+s_3)\Gamma(a_2+s_4)\Gamma(b_1+s_1+s_2)\Gamma(b_2+s_3+s_4)}{\Gamma(c_1+s_1+s_3)\Gamma(c_2+s_2)\Gamma(c_3+s_4)}\times \qquad (1.3.52)\\
&\times\Gamma(-s_1)\Gamma(-s_2)\Gamma(-s_3)\Gamma(-s_4)(-x)^{s_1}(-y)^{s_2}(-z)^{s_3}(-t)^{s_4}\,ds_1ds_2ds_3ds_4.
\end{aligned}
$$

Из соотношения (1.3.46) и (1.3.52) следует, что изображения правой и левой частей совпадают. Тогда соответственно равны и их оригиналы согласно теореме Слайтера [92, с. 48]. Таким образом, операторное тождество (1.3.51) доказано. Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2. Для гипергеометрических функций от четырех переменных (1.1.34), (1.1.36)-(1.1.39), (1.1.41), (1.1.44), (1.1.46), (1.1.49)-(1.1.55) справедливы следующие формулы разложения:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\ =\left(1-t\right)^{-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i\left(b\right)_i\left(c_4-a_2\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_C^{(3)}\left(a_1,b+i;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right), \tag{1.3.53}$$

$$\left(1-t\right)^{-b}F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(c_4-a_2\right)_i\left(b\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}t^i F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b+i;c_1,c_2,c_3,c_4+i;x,y,z,t\right), \tag{1.3.54}$$

$$F_3^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\left(1-t-z\right)^{-b}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{i+j}\left(b\right)_{i+j}\left(c_3-a_2\right)_i\left(c_4-a_3\right)_j}{\left(c_3\right)_i\left(c_4\right)_j i!j!}\times \\ \times\left(\frac{z}{1-t-z}\right)^i\left(\frac{t}{1-t-z}\right)^j F_4\left(a_1,b+i+j;c_1,c_2;\frac{x}{1-t-z},\frac{y}{1-t-z}\right), \tag{1.3.55}$$

$$\left(1-t-z\right)^{-b}F_4\left(a_1,b;c_1,c_2;\frac{x}{1-t-z},\frac{y}{1-t-z}\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(c_3-a_2\right)_i\left(c_4-a_3\right)_j\left(b\right)_{i+j}}{\left(c_3\right)_i\left(c_4\right)_j i!j!}\times \\ \times z^i t^j F_3^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b+i+j;c_1,c_2,c_3+i,c_4+j;x,y,z,t\right), \tag{1.3.56}$$

$$F_4^{(4)}\left(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\ =\left(1-z\right)^{-a}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i\left(a\right)_i\left(c_3-c\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i F_C^{(3)}\left(a+i,b;c_1,c_2,c_4;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},\frac{t}{1-z}\right), \tag{1.3.57}$$

$$\left(1-z\right)^{-a}F_C^{(3)}\left(a,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},\frac{t}{1-z}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_i\left(c_3-c\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}z^i F_4^{(4)}\left(a+i,b,c;c_1,c_2,c_3+i,c_4;x,y,z,t\right), \tag{1.3.58}$$

$$F_5^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\ =\left(1-t\right)^{-b_2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i\left(b_2\right)_i\left(c_4-a_2\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_E\left(a_1;b_1,b_2+i;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x,y,\frac{z}{1-t}\right), \tag{1.3.59}$$

$$\left(1-t\right)^{-b_2}F_E\left(a_1;b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,\frac{z}{1-t}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(b_2\right)_i\left(c_4-a_2\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}t^i F_5^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2+i;c_1,c_2,c_3,c_4+i;x,y,z,t\right), \tag{1.3.60}$$

$$F_6^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\left(1-y-z\right)^{-a_1}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}\left(a_1\right)_{i+j}\left(c_2-b_2\right)_i\left(c_3-b_3\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j i!j!}\left(\frac{y}{1-y-z}\right)^i\left(\frac{z}{1-y-z}\right)^j\times \tag{1.3.61}$$
$$\times F_2\left(b_1;a_1+i+j,a_2;c_1,c_4;\frac{x}{1-y-z},t\right),$$

$$\left(1-y-z\right)^{-a_1}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_4;\frac{x}{1-y-z},t\right)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{i+j}\left(c_2-b_2\right)_i\left(c_3-b_3\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j i!j!}y^iz^jF_6^{(4)}\left(a_1+i+j,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2+i,c_3+j,c_4;x,y,z,t\right), \tag{1.3.62}$$

$$F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\left(1-y\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-a_2}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_j\left(c_2-b_2\right)_i\left(c_4-b_3\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_4\right)_j i!j!}\left(\frac{y}{1-y}\right)^i\left(\frac{t}{1-t}\right)^j\times \tag{1.3.63}$$
$$\times F_2\left(b_1;a_1+i,a_2+j;c_1,c_3;\frac{x}{1-y},\frac{z}{1-y}\right),$$

$$\left(1-y\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-a_2}F_2\left(b_1;a_1,a_2;c_1,c_3;\frac{x}{1-y},\frac{x}{1-y}\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_j\left(c_2-b_2\right)_i\left(c_4-b_3\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_4\right)_j i!j!}y^it^j \tag{1.3.64}$$
$$\times F_8^{(4)}\left(a_1+i,a_2+j,b_1,b_2;c_1,c_2+i,c_3,c_4+j;x,y,z,t\right),$$

$$F_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\left(1-t\right)^{-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(b\right)_i\left(c_3-a_3\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^iF_F\left(b+i;a_1,a_2;c_2,c_1;\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t},\frac{x}{1-t}\right), \tag{1.3.65}$$

$$\left(1-t\right)^{-b}F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t},\frac{x}{1-t}\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(b\right)_i\left(c_3-a_3\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}t^iF_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,b+i;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t\right), \tag{1.3.66}$$

$$F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=$$
$$=\left(1-z-t\right)^{-b}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}\left(b\right)_{i+j}\left(c_2-a_3\right)_i\left(c_3-a_4\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j i!j!}\left(\frac{z}{1-z-t}\right)^i\left(\frac{t}{1-z-t}\right)^j\times \tag{1.3.67}$$
$$\times F_1\left(b+i+j;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-z-t},\frac{y}{1-z-t}\right),$$

$$\left(1-z-t\right)^{-b} F_1\left(b;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-z-t},\frac{y}{1-z-t}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b)_{i+j}\left(c_2-a_3\right)_i\left(c_3-a_4\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j i!j!}z^i t^j F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b+i+j;c_1,c_2+i,c_3+j;x,y,z,t\right), \tag{1.3.68}$$

$$F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)= \\ =\left(1-t\right)^{-b_2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(b_2\right)_i\left(c_3-a_2\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_F\left(a_1;b_1,b_2+i;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right), \tag{1.3.69}$$

$$\left(1-t\right)^{-b_2} F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,\frac{z}{1-t},x\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(b_2\right)_i\left(c_3-a_2\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}t^i F_{17}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2+i;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t\right), \tag{1.3.70}$$

$$F_{19}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\left(1-z\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-a_2}\times \\ \times\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_j\left(c_3-b_2\right)_{i+j}}{\left(c_3\right)_{i+j} i!j!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i\left(\frac{t}{1-t}\right)^j F_4\left(a_1+i,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right), \tag{1.3.71}$$

$$\left(1-t\right)^{-a_2}\left(1-z\right)^{-a_1} F_4\left(a_1,b_1;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)= \\ =\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_j\left(c_3-b_2\right)_{i+j}}{\left(c_3\right)_{i+j} i!j!}z^i t^j F_{19}^{(4)}\left(a_1+i,a_2+j,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3+i+j;x,y,z,t\right), \tag{1.3.72}$$

$$F_{20}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\left(1-z\right)^{-a_1}\times \\ \times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_i\left(c_3-b_2\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i F_R\left(a_1+i,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right), \tag{1.3.73}$$

$$\left(1-z\right)^{-a_1} F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_3;c_2,c_1;\frac{y}{1-z},t,\frac{x}{1-z}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_i\left(c_3-b_2\right)_i}{\left(c_3\right)_i i!}z^i F_{20}^{(4)}\left(a_1+\mathrm{i},a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3+\mathrm{i};x,y,z,t\right), \tag{1.3.74}$$

$$F_{22}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\left(1-z\right)^{-a_1}\left(1-t\right)^{-b_1}\times \\ \times\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}\left(a_1\right)_i\left(b_1\right)_j\left(c_2-b_3\right)_i\left(c_3-a_2\right)_j}{\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j i!j!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i\left(\frac{t}{1-t}\right)^j\times \\ \times F_1\left(a_1+i;b_1+j,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right), \tag{1.3.75}$$

$$(1-z)^{-a_1}(1-t)^{-b_1}F_1\left(a_1;b_1,b_2;c_1;\frac{x}{(1-z)(1-t)},\frac{y}{1-z}\right)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(a_1)_i(b_1)_j(c_2-b_3)_i(c_3-a_2)_j}{(c_2)_i(c_3)_j\,i!\,j!}z^i t^j F_{22}^{(4)}(a_1+i,a_2,b_1+j,b_2,b_3;c_1,c_2+i,c_3+j;x,y,z,t), \tag{1.3.76}$$

$$F_{23}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=$$
$$=(1-t)^{-b_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(b_1)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\,i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i F_G\left(a_1;b_1+\mathrm{i},b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right), \tag{1.3.77}$$

$$(1-t)^{-b_1}F_G\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2;\frac{x}{1-t},y,z\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(b_1)_i(c_3-a_2)_i}{(c_3)_i\,i!}t^i F_{23}^{(4)}(a_1,a_2,b_1+i,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t), \tag{1.3.78}$$

$$F_{24}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=$$
$$=(1-z)^{-a_1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(a_1)_i(c_3-b_2)_i}{(c_3)_i\,i!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^i F_R\left(a_1+i,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},t,\frac{y}{1-z}\right), \tag{1.3.79}$$

$$(1-z)^{-a_1}F_R\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2;\frac{x}{1-z},t,\frac{y}{1-z}\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_1)_i(c_3-b_2)_i}{(c_3)_i\,i!}z^i F_{24}^{(4)}(a_1+i,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3+i;x,y,z,t), \tag{1.3.80}$$

$$F_{25}^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t)=(1-y-z)^{-a_1}\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_{i+j}(c_2-b_2)_i(c_3-b_3)_j}{(c_2)_i(c_3)_j\,i!\,j!}$$
$$\times\left(\frac{y}{1-y-z}\right)^i\left(\frac{z}{1-y-z}\right)^j F_1\left(b_1;a_1+i+j,a_2;c_1;\frac{x}{1-y-z},t\right), \tag{1.3.81}$$

$$(1-y-z)^{-a_1}F_1\left(b_1;a_1,a_2;c_1;\frac{x}{1-y-z},t\right)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{i+j}(c_2-b_2)_i(c-b_3)_j}{(c_2)_i(c_3)_j\,i!\,j!}y^i z^j F_{25}^{(4)}(a_1+i+j,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2+i,c_3+j;x,y,z,t). \tag{1.3.82}$$

Доказательство теоремы 1.3.2. Доказательство теоремы реализуется посредством операторных тождеств (1.3.11) - (1.3.40), некоторых свойств гипергеометрических функций многих переменных и формул (1.3.5). Покажем достоверность разложения (1.3.53).

Имеет место равенство:

$$\left(1-t\right)^{-b} F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;\frac{x}{1-t},\frac{y}{1-t},\frac{z}{1-t}\right)=\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}. \quad (1.3.83)$$

Учитывая тождество (1.3.83) и определение оператора $H_t\left(a_2,c_4\right)$ в соответствии с (1.3.9), из (1.3.11), получим

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(c_4-a_2\right)_j\left(-\delta_t\right)_j}{\left(c_4\right)_j j!}\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(b\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}.$$

Применяя к полученному выражению тождество (1.3.5), следует

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i\left(b\right)_i\left(c_4-a_2\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}t^i\sum_{m,n,p,q=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(b+i\right)_{m+n+p+q}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}\frac{t^q}{q!}.$$

В силу формулы (1.1.8) имеем

$$\begin{aligned}F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)&=\left(1-t\right)^{-b}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i\left(b\right)_i\left(c_4-a_2\right)_i}{\left(c_4\right)_i i!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^i\times\\ &\times\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{m+n+p}\left(b+i\right)_{m+n+p}}{\left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n\left(c_3\right)_p}\frac{\left(\frac{x}{1-t}\right)^m}{m!}\frac{\left(\frac{y}{1-t}\right)^n}{n!}\frac{\left(\frac{z}{1-t}\right)^p}{p!}.\end{aligned} \quad (1.3.84)$$

С учетом определения гипергеометрической функции (1.1.26) для $n=3$

$$F_C^{(3)}\left(\alpha,\beta;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_{m_1+m_2+m_3}\left(\beta\right)_{m_1+m_2+m_3}}{\left(\gamma_1\right)_{m_1}\left(\gamma_2\right)_{m_2}\left(\gamma_3\right)_{m_3}}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}\frac{x_2^{m_2}}{m_2!}\frac{x_3^{m_3}}{m_3!},$$

из соотношения (1.3.84) получаем разложение (1.3.53).

Таким образом, теорема 1.3.2 доказана.

Замечание 1.3.1. Формулы разложения (1.3.53) - (1.3.82) могут быть доказаны путем сравнения коэффициентов перед множителем $x^m y^n z^p t^q$ в обеих частях равенства.

1.4 Формулы разложения гипергеометрических функций четырех переменных с операторами $\nabla_{x,y}(c)$ и $\Delta_{x,y}(c)$, $\tilde{\nabla}_{x;y,z,t}(c)$ и $\tilde{\Delta}_{x;y,z,t}(c)$

Теорема 1.4.1. Для гипергеометрических функций от четырех переменных (1.1.34) – (1.1.48) имеют место следующие операторные тождества:

$$F_1^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\tilde{\nabla}_{t;x,y,z}(b)F(a_2,b;c_4;t)F_C^{(3)}(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z), \quad (1.4.1)$$

$$F(a_2,b;c_4;t)F_C^{(3)}(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z)=\tilde{\Delta}_{t;x,y,z}(b)F_1^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \quad (1.4.2)$$

$$\begin{aligned}&F_2^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\&\quad=\nabla_{x,y}(a_1)\nabla_{z,t}(a_2)F_A^{(4)}(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned}&F_A^{(4)}(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z)=\\&\quad=\Delta_{x,y}(a_1)\Delta_{z,t}(a_2)F_2^{(4)}(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$$F_3^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\nabla_{x,y}(a_1)F_A^{(4)}(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \quad (1.4.5)$$

$$F_A^{(4)}(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\Delta_{x,y}(a_1)F_3^{(4)}(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \quad (1.4.6)$$

$$F_4^{(4)}(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\tilde{\nabla}_{z;x,y,t}(a)F(a,c;c_3;z)F_C^{(3)}(a,b;c_1,c_2,c_4;x,y,t), \quad (1.4.7)$$

$$F(a,c;c_3;z)F_C^{(3)}(a,b;c_1,c_2,c_4;x,y,t)=\tilde{\Delta}_{z;x,y,t}(a)F_4^{(4)}(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t), \quad (1.4.8)$$

$$\begin{aligned}&F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\&\quad=\nabla_{x,y}(b_1)\nabla_{z,t}(b_2)F(a_2,b_2;c_4;t)F_A^{(3)}(a_1;b_1,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,x,y,z),\end{aligned} \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned}&F(a_2,b_2;c_4;t)F_A^{(3)}(a_1;b_1,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,x,y,z)=\\&\quad=\Delta_{x,y}(b_1)\Delta_{z,t}(b_2)F_5^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned}&F_6^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t)=\\&\quad=\nabla_{x,t}(b_1)F(a_2,b_1;c_4;t)F_A^{(3)}(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z),\end{aligned} \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned}&F(a_2,b_1;c_4;t)F_A^{(3)}(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z)=\\&\quad=\Delta_{x,t}(b_1)F_6^{(4)}(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t),\end{aligned} \quad (1.4.12)$$

$$
\begin{aligned}
&F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&\quad=\nabla_{x,y}\left(a_1\right)\nabla_{x,z}\left(b_1\right)\nabla_{y,t}\left(b_2\right)F\left(a_1,b_1;c_1;x\right)F\left(a_1,b_2;c_2;y\right)F_2\left(a_2;b_1,b_2;c_3,c_4;z,t\right),
\end{aligned}
\tag{1.4.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)= \\
&\quad=\nabla_{z,t}\left(a_2\right)\nabla_{x,z}\left(b_1\right)F\left(a_2,b_1;c_3;z\right)F\left(a_2,b_3;c_4;t\right)F_2\left(a_1;b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right),
\end{aligned}
\tag{1.4.14}
$$

$$
F_9^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\tilde{\nabla}_{t:x,y,z}\left(b\right)\Delta_{x,t}\left(c_1\right)F\left(a_2,b;c_1;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right),
\tag{1.4.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{10}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)= \\
&\quad=\tilde{\nabla}_{t;x,y,z}\left(b\right)\nabla_{z,t}\left(a_2\right)F\left(a_2,b;c_3;t\right)F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;y,z,x\right),
\end{aligned}
\tag{1.4.16}
$$

$$
F_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\tilde{\nabla}_{t;x,y,z}\left(b\right)F\left(a_3,b;c_3;t\right)F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;y,z,x\right),
\tag{1.4.17}
$$

$$
F\left(a_3,b;c_3;t\right)F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;y,z,x\right)=\tilde{\Delta}_{t;x,y,z}\left(b\right)F_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right),
\tag{1.4.18}
$$

$$
F_{12}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\nabla_{x,y}\left(a_1\right)\Delta_{z,t}\left(c_3\right)F_A^{(4)}\left(b;a_1,a_1,a_2,a_3;c_1,c_2,c_3,c_3;x,y,z,t\right),
\tag{1.4.19}
$$

$$
F_A^{(4)}\left(b;a_1,a_1,a_2,a_3;c_1,c_2,c_3,c_3;x,y,z,t\right)=\Delta_{x,y}\left(a_1\right)\nabla_{z,t}\left(c_3\right)F_{12}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right),
\tag{1.4.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)= \\
&\quad=\tilde{\nabla}_{t;x,y,z}\left(b\right)\Delta_{x,y}\left(c_1\right)F\left(a_4,b;c_3;t\right)F_A^{(3)}\left(b;a_1,a_2,a_3;c_1,c_1,c_2;x,y,z\right),
\end{aligned}
\tag{1.4.21}
$$

$$
F_{14}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\Delta_{x,t}\left(c_1\right)F\left(a_2,b_2;c_1;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b_1;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right),
\tag{1.4.22}
$$

$$
F\left(a_2,b_2;c_1;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b_1;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)=\nabla_{x,t}\left(c_1\right)F_{14}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right),
\tag{1.4.23}
$$

$$
F_{15}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\tilde{\nabla}_{t;x,y}\left(b_1\right)F\left(a_2,b_1;c_3;t\right)F_F\left(a_1;b_1,b_2;c_2,c_1;y,z,x\right).
\tag{1.4.24}
$$

Доказательство теоремы 1.4.1. Покажем справедливость тождеств (1.4.1) – (1.4.24) с помощью преобразования Меллина (1.3.45).

Докажем справедливость операторного тождества (1.4.1). Используя формулу (1.1.14) – интегральное представление гипергеометрической функции одной переменной через интеграл типа Меллина и Бернса, запишем интегральное представление для четырехмерной гипергеометрической функции $F_1^{(4)}$:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^4}\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_1+s_1+s_2+s_3\right)\Gamma\left(a_2+s_4\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3+s_4\right)}{\Gamma\left(c_1+s_1\right)\Gamma\left(c_2+s_2\right)\Gamma\left(c_3+s_3\right)\Gamma\left(c_4+s_4\right)}\times \tag{1.4.25}$$
$$\times\Gamma\left(-s_1\right)\Gamma\left(-s_2\right)\Gamma\left(-s_3\right)\Gamma\left(-s_4\right)\left(-x\right)^{s_1}\left(-y\right)^{s_2}\left(-z\right)^{s_3}\left(-t\right)^{s_4}ds_1ds_2ds_3ds_4.$$

Распишем операторное тождество (1.4.1) с учетом определения многомерного оператора $\tilde{\nabla}_{t;x,y,z}$:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(-\delta_t\right)_{i+j+k}\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_j\left(-\delta_z\right)_k}{\left(b\right)_{i+j+k}i!j!k!}F\left(a_2,b;c_4;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right). \tag{1.4.26}$$

Представим гипергеометрическую функцию $F\left(a_2,b;c_4;t\right)$ через интеграл типа Меллина-Бернса (1.1.14):

$$F\left(a_2,b;c_4;t\right)=\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b\right)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_2+s_4\right)\Gamma\left(b+s_4\right)}{\Gamma\left(c_4+s_4\right)}\Gamma\left(-s_4\right)\left(-t\right)^{s_4}ds_4. \tag{1.4.27}$$

Применим преобразование (1.3.48) к (1.4.27), получим:

$$\left(-\delta_t\right)_{i+j+k}F\left(a_2,b;c_4;t\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b\right)}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_2+s_4\right)\Gamma\left(b+s_4\right)}{\Gamma\left(c_4+s_4\right)}\frac{\Gamma\left(i+j+k-s_4\right)}{\Gamma\left(-s_4\right)}\Gamma\left(-s_4\right)\left(-t\right)^{s_4}ds_4. \tag{1.4.28}$$

Запишем трехмерную функцию Лауричеллы $F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)$ через интеграл типа Меллина-Бернса (1.1.14):

$$F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\frac{1}{\left(2\pi i\right)^3}\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(b\right)}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_1+s_1+s_2+s_3\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3\right)}{\Gamma\left(c_1+s_1\right)\Gamma\left(c_2+s_2\right)\Gamma\left(c_3+s_3\right)} \tag{1.4.29}$$
$$\times\Gamma\left(-s_1\right)\Gamma\left(-s_2\right)\Gamma\left(-s_3\right)\left(-x\right)^{s_1}\left(-y\right)^{s_2}\left(-z\right)^{s_3}ds_1ds_2ds_3.$$

Применяя (1.3.48) к (1.4.29), имеем:

$$\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_j\left(-\delta_z\right)_k F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)\leftrightarrow\frac{1}{\left(2\pi i\right)^3}\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(b\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_1+s_1+s_2+s_3\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3\right)}{\Gamma\left(c_1+s_1\right)\Gamma\left(c_2+s_2\right)\Gamma\left(c_3+s_3\right)}\frac{\Gamma\left(i-s_1\right)}{\Gamma\left(-s_1\right)}\frac{\Gamma\left(j-s_2\right)}{\Gamma\left(-s_2\right)}\frac{\Gamma\left(k-s_3\right)}{\Gamma\left(-s_3\right)}\times \tag{1.4.30}$$
$$\times\Gamma\left(-s_1\right)\Gamma\left(-s_2\right)\Gamma\left(-s_3\right)\left(-x\right)^{s_1}\left(-y\right)^{s_2}\left(-z\right)^{s_3}ds_1ds_2ds_3.$$

Тогда из равенства (1.4.26) с учетом (1.4.28) и (1.4.30) следует

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^4}\frac{\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(c_3\right)\Gamma\left(c_4\right)}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b\right)}\times$$
$$\times\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma\left(a_1+s_1+s_2+s_3\right)\Gamma\left(a_2+s_4\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3\right)\Gamma\left(b+s_4\right)}{\Gamma\left(c_1+s_1\right)\Gamma\left(c_2+s_2\right)\Gamma\left(c_3+s_3\right)\Gamma\left(c_4+s_4\right)}\times \tag{1.4.31}$$
$$\times\Gamma\left(-s_1\right)\Gamma\left(-s_2\right)\Gamma\left(-s_3\right)\Gamma\left(-s_4\right)\left(-x\right)^{s_1}\left(-y\right)^{s_2}\left(-z\right)^{s_3}\left(-t\right)^{s_4}\times$$
$$\times F_D^{(3)}\left(-s_4;-s_1,-s_2,-s_3;b;1,1,1\right)ds_1ds_2ds_3ds_4.$$

В силу определения (1.1.28) в случае $n=3$

$$F_D^{(3)}\left(-s_4;-s_1,-s_2,-s_3;b;1,1,1\right)=\frac{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3+s_4\right)}{\Gamma\left(b+s_4\right)\Gamma\left(b+s_1+s_2+s_3\right)}, \tag{1.4.32}$$

подставляя (1.4.32) в (1.4.31), окончательно имеем интегральное представление Меллина-Бернса (1.4.25).

Следовательно, изображения правой и левой частей операторного тождества (1.4.1) совпадают. Тогда используя теорему Слайтера [92, с. 48], делаем выводы, что и их оригиналы равны. Таким образом, операторное тождество (1.4.1) доказано. Теорема 1.4.1 доказана.

Теорема 1.4.2. Для гипергеометрических функций от четырех переменных (1.1.34) – (1.1.48) имеют место следующие формулы разложения:

$$F_1^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(a_2\right)_{i+j+k}\left(a_1\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_1\right)_i\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_k\left(c_4\right)_{i+j+k}i!j!k!}\left(xt\right)^i\left(yt\right)^j\left(zt\right)^k\times$$
$$\times F\left(a_2+i+j+k,b+i+j+k;c_4+i+j+k;t\right)\times \tag{1.4.33}$$
$$\times F_C^{(3)}\left(a_1+i+j+k,b+i+j+k;c_1+i,c_2+j,c_3+k,x,y,z\right),$$

$$F\left(a_2,b;c_4;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{i+j+k}\left(a_1\right)_{i+j+k}\left(a_2\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_1\right)_i\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_k\left(c_4\right)_{i+j+k}i!j!k!}\times$$
$$\times\left(xt\right)^i\left(yt\right)^j\left(zt\right)^k F_1^{(4)}\left(a_1+i+j+k,a_2+i+j+k,b+i+j+k;\right. \tag{1.4.34}$$
$$\left.c_1+\mathrm{i},c_2+\mathrm{j},c_3+\mathrm{k},c_4+i+j+k;x,y,z,t\right),$$

$$F_2^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(b)_{2i+2j}(a_1)_i(a_2)_j}{(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_j(c_4)_j\,i!\,j!}(xy)^i(zt)^j\times$$
$$\times F_A^{(3)}\left(b+2i+2j;a_1+i,a_1+i,a_2+j,a_2+j;c_1+i,c_2+i,c_3+j,c_4+j;x,y,z\right),\tag{1.4.35}$$

$$F_A^{(3)}\left(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_i(a_2)_j(b)_{2i+2j}}{(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_j(c_4)_j\,i!\,j!}(xy)^i(zt)^j\times$$
$$\times F_2^{(4)}\left(a_1+i,a_2+j,b+2i+2j;c_1+i,c_2+i,c_3+j,c_4+j;x,y,z,t\right),\tag{1.4.36}$$

$$F_3^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,b;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_1)_i(b)_{2i}}{(c_1)_i(c_2)_i\,i!}(xy)^i F_A^{(4)}\left(b+2i;a_1+i,a_1+i,a_2,a_2;c_1+i,c_2+i,c_3,c_4;x,y,z,t\right),\tag{1.4.37}$$

$$F_A^{(4)}\left(b;a_1,a_1,a_2,a_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i(a_1)_i(b)_{2i}}{(c_1)_i(c_2)_i\,i!}(xy)^i F_3^{(4)}\left(a_1+i,a_2,a_3,b+2i;c_1+i,c_2+i,c_3,c_4;x,y,z,t\right),\tag{1.4.38}$$

$$F_4^{(4)}\left(a,b,c;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{i+j+k}(c)_{i+j+k}(b)_{i+j+k}}{(c_1)_i(c_2)_j(c_3)_{i+j+k}(c_4)_k\,i!\,j!k!}(xz)^i(yz)^j(zt)^k\times$$
$$\times F\left(a+i+j+k,c+i+j+k;c_3+i+j+k;z\right)\times\tag{1.4.39}$$
$$\times F_C^{(3)}\left(a+i+j+k,b+i+j+k;c_1+i,c_2+j,c_4+k;x,y,t\right),$$

$$F\left(a,c;c_3;z\right)F_C^{(3)}\left(a,b;c_1,c_2,c_4;x,y,t\right)=$$
$$=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j+k}(a)_{i+j+k}(b)_{i+j+k}(c)_{i+j+k}}{(c_1)_i(c_2)_j(c_3)_{i+j+k}(c_4)_k\,i!\,j!k!}(xz)^i(yz)^j(zt)^k\times\tag{1.4.40}$$
$$\times F_4^{(4)}\left(a+i+j+k,b+i+j+k,c+i+j+k;c_1+i,c_2+j,c_3+i+j+k,c_4+k;x,y,z,t\right),$$

$$F_5^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{2i+j}(a_2)_j(b_1)_i(b_2)_j}{(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_j(c_4)_j\,i!\,j!}(xy)^i(zt)^j\times\tag{1.4.41}$$
$$\times F\left(a_2+j,b_2+j;c_4+j;t\right)F_A^{(3)}\left(a_1+2i+j;b_1+i,b_1+i,b_2+j;c_1+i,c_2+i,c_3+j,x,y,z\right),$$

$$F\left(a_2,b_2;c_4;t\right)F_A^{(3)}\left(a_1;b_1,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)=$$
$$=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}(a_1)_{2i+j}(a_2)_j(b_1)_i(b_2)_j}{(c_1)_i(c_2)_i(c_3)_j(c_4)_j\,i!\,j!}(xy)^i(zt)^j\times\tag{1.4.42}$$
$$\times F_5^{(4)}\left(a_1+2i+j,a_2+j,b_1+i,b_2+j;c_1+i,c_2+i,c_3+j,c_4+j;x,y,z,t\right),$$

$$F_6^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_i\left(b_1\right)_i}{\left(c_1\right)_i\left(c_4\right)_i i!}\left(xt\right)^i\times$$
$$\times F\left(a_2+i,b_1+i;c_4+i;t\right)F_A^{(3)}\left(a_1+i;b_1+i,b_2,b_3;c_1+i,c_2,c_3;x,y,z\right), \quad (1.4.43)$$

$$F\left(a_2,b_1;c_4;t\right)F_A^{(3)}\left(a_1;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)=$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_i\left(b_1\right)_i}{\left(c_1\right)_i\left(c_4\right)_i i!}\left(xt\right)^i F_6^{(4)}\left(a_1+i,a_2+i,b_1+i,b_2,b_3;c_1+i,c_2,c_3,c_4+i;x,y,z,t\right), \quad (1.4.44)$$

$$F_7^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=$$
$$=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{i+j}\left(a_1\right)_{i+k}\left(a_2\right)_{j+k}\left(b_1\right)_{i+j}\left(b_2\right)_{i+k}}{\left(a_1\right)_i\left(c_1\right)_{i+j}\left(c_2\right)_{i+k}\left(c_3\right)_j\left(c_4\right)_k i!j!k!}\left(xy\right)^i\left(xz\right)^j\left(yt\right)^k\times$$
$$\times F\left(a_1+i+j,b_1+i+j;c_1+i+j;x\right)F\left(a_1+i+k,b_2+i+k;c_2+i+k;y\right)\times \quad (1.4.45)$$
$$\times F_2\left(a_2+j+k;b_1+i+j,b_2+i+k;c_3+j,c_4+k;z,t\right),$$

$$F_8^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a_2\right)_{i+j}\left(a_1\right)_j\left(b_1\right)_{i+j}\left(b_3\right)_i}{\left(c_1\right)_j\left(c_3\right)_{i+j}\left(c_4\right)_i i!j!}\times$$
$$\times\left(xz\right)^j\left(zt\right)^i F\left(a_2+i+j,b_1+i+j;c_3+i+j;z\right)\times \quad (1.4.46)$$
$$\times F\left(a_2+i,b_3+i;c_4+i;t\right)F_2\left(a_1+j;b_1+i+j,b_2;c_1+j,c_2;x,y\right),$$

$$F_9^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_{i+j+k+l}\left(a_2\right)_{i+j+k+l}\left(b\right)_{2i+j+k+l}\left(c_1\right)_{2i}}{\left(c_1+i-1\right)_i\left(c_1\right)_{2i+j}\left(c_1\right)_{2i+j+k+l}\left(c_2\right)_k\left(c_3\right)_l i!j!k!l!}\left(xt\right)^{i+j}\left(yt\right)^k\left(zt\right)^l\times \quad (1.4.47)$$
$$\times F\left(a_2+i+j+k+l,b+2i+j+k+l;c_1+2i+j+k+l;t\right)\times$$
$$\times F_C^{(3)}\left(a_1+i+j+k+l,b+2i+j+k+l;c_1+2i+j,c_2+k,c_3+l;x,y,z\right),$$

$$F_{10}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{i+j+l}\left(a_2\right)_k\left(a_2\right)_{i+j+k+l}\left(b\right)_{2i+j+k+l}}{\left(a_2\right)_i\left(c_1\right)_{i+k+l}\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_{i+j+k+l} i!j!k!l!}\times$$
$$\times\left(xt\right)^j\left(yt\right)^k\left(zt\right)^{i+l} F\left(a_2+i+j+k+l,b+2i+j+k+l;c_3+i+j+k+l;t\right)\times \quad (1.4.48)$$
$$\times F_F\left(b+2i+j+k+l;a_1+i+j+l,a_2+\mathrm{k};c_2+\mathrm{j},c_1+i+k+l;y,z,x\right),$$

$$F_{11}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{i+k}\left(a_2\right)_j\left(a_3\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_1\right)_{j+k}\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_{i+j+k} i!j!k!}\left(xt\right)^i\left(yt\right)^j\left(zt\right)^k\times$$
$$\times F\left(a_3+i+j+k,b+i+j+k;c_3+i+j+k;t\right)\times \quad (1.4.49)$$
$$\times F_F\left(b+i+j+k;a_1+i+k,a_2+j;c_2+\mathrm{i},c_1+j+k;y,z,x\right),$$

$$F\left(a_3,b;c_3;t\right)F_F\left(b;a_1,a_2;c_2,c_1;y,z,x\right)= \\ =\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j+k}\left(a_1\right)_{i+j}\left(a_2\right)_k\left(a_3\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_1\right)_{i+k}\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_{i+j+k}\,i!\,j!\,k!}(xt)^i(yt)^j(zt)^k\times \\ \times F_{11}^{(4)}\left(a_1+i+j,a_2+k,a_3+i+j+k,b+i+j+k;c_1+i+k,c_2+j,c_3+i+j+k;x,y,z,t\right), \tag{1.4.50}$$

$$F_{12}^{(4)}\left(a_1,a_2,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_j\left(a_2\right)_i\left(a_3\right)_i\left(b\right)_{2i+2j}}{\left(c_3+i-1\right)_i\left(c_1\right)_j\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_{2i}\,i!\,j!}(xy)^j(zt)^i\times \\ \times F_A^{(4)}\left(b+2i+2j;a_1+j,a_1+j,a_2+i,a_3+i;c_1+j,c_2+j,c_3+2i,c_3+2i;x,y,z,t\right), \tag{1.4.51}$$

$$F_A^{(4)}\left(b;a_1,a_1,a_2,a_3;c_1,c_2,c_3,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_j\left(a_3\right)_j\left(b\right)_{2i+2j}}{\left(c_1\right)_i\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_j\left(c_3\right)_{2j}\,i!\,j!}(xy)^i(zt)^j\times \\ \times F_{12}^{(4)}\left(a_1+i,a_2+j,b+2i+2j;c_1+i,c_2+i,c_3+2j;x,y,z,t\right), \tag{1.4.52}$$

$$F_{13}^{(4)}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_{i+j}\left(a_2\right)_{i+k}\left(a_3\right)_l\left(a_4\right)_{j+k+l}\left(c_1\right)_{2i}\left(b\right)_{2i+j+k+l}}{\left(c_1+i-1\right)_i\left(c_1\right)_{2i+j}\left(c_1\right)_{2i+k}\left(c_2\right)_l\left(c_3\right)_{j+k+l}\,i!\,j!\,k!\,l!}(xy)^i(xt)^j(yt)^k(zt)^l\times \\ \times F\left(a_4+j+k+l,b+2i+j+k+l;c_3+j+k+l;t\right)\times \\ \times F_A^{(3)}\left(b+2i+j+k+l;a_1+i+j,a_2+i+k,a_3+l;c_1+2i+j,c_1+2i+k,c_2+l;x,y,z\right), \tag{1.4.53}$$

$$F_{14}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_i\left(b_2\right)_i\left(b_1\right)_i}{\left(c_1+i-1\right)_i\left(c_1\right)_{2i}\,i!}(xt)^i\times \\ \times F\left(a_2+i,b_2+i;c_1+2i;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1+i,b_1+i;c_1+2i,c_2,c_3;x,y,z\right), \tag{1.4.54}$$

$$F\left(a_2,b_2;c_1;t\right)F_C^{(3)}\left(a_1,b_1;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right)= \\ =\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_i\left(a_2\right)_i\left(b_1\right)_i\left(b_2\right)_i}{\left(c_1\right)_i\left(c_1\right)_{2i}\,i!}(xt)^i F_{14}^{(4)}\left(a_1+i,a_2+i,b_1+i,b_2+i;c_1+2i,c_2,c_3;x,y,z,t\right), \tag{1.4.55}$$

$$F_{15}^{(4)}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x,y,z,t\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_{i+j}\left(a_2\right)_{i+j}\left(b_1\right)_i\left(b_2\right)_j}{\left(c_1\right)_j\left(c_2\right)_i\left(c_3\right)_{i+j}\,i!\,j!}(xt)^i(yt)^j\times \\ \times F\left(a_2+i+j,b_1+i+j;c_3+i+j;t\right)F_F\left(a_1+i+j;b_1+i,b_2+j;c_2+i,c_1+j;y,z,x\right). \tag{1.4.56}$$

Доказательство теоремы 1.4.2. Докажем справедливость разложения (1.4.33). В доказательстве применяются преобразования Меллина [92, с. 9].

В силу справедливости второй формулы (1.3.5) будут иметь место следующие равенства:

$$\left(-\delta_t\right)_{i+j+k} F\left(a_2,b;c_4;t\right)=$$
$$=\left(-1\right)^{i+j+k} t^{i+j+k} \frac{\left(a_2\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_4\right)_{i+j+k}} F\left(a_2+i+j+k,b+i+j+k;c_4+i+j+k;t\right), \tag{1.4.57}$$

$$\left(-\delta_x\right)_i\left(-\delta_y\right)_j\left(-\delta_z\right)_k F_C^{(3)}\left(a_1,b;c_1,c_2,c_3,x,y,z\right)=\left(-1\right)^{i+j+k} x^i y^j z^k \times$$
$$\times\frac{\left(a_1\right)_{i+j+k}\left(b\right)_{i+j+k}}{\left(c_1\right)_i\left(c_2\right)_j\left(c_3\right)_k} F_C^{(3)}\left(a_1+i+j+k,b+i+j+k;c_1+i,c_2+j,c_3+k,x,y,z\right), \tag{1.4.58}$$

Подставляя равенства (1.4.57) и (1.4.58) в выражение (1.4.26), мы получим разложение (1.4.33). Теорема 1.4.2 доказана.

Замечание 1.4.1. Формулы разложения (1.4.33) - (1.4.56) могут быть доказаны путем сравнения коэффициентов множителя $x^m y^n z^p t^q$ в обеих частях равенства.

2 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (H)

В настоящем разделе в области $R_+^4 = \{(x, y, z, t) : x > 0, y > 0, z > 0, t > 0\}$ будут построены фундаментальные решения для четырехмерного уравнения Геллерстедта в явном виде [93]. Для доказательства того, что эти функции обладают свойствами фундаментального решения, существенно используются формулы разложения гипергеометрической функции Лауричеллы четырех переменных по гипергеометрическим функциям Гаусса. Далее будет установлено, что найденные решения имеют особенность порядка r^{-2} при $r \to 0.$

Докажем лемму, результат которой будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.1. Для функции Лауричеллы $F_A^{(n)}$, в случае, когда $c_2, \ldots, c_n$ не являются отрицательными целыми числами, имеет место тождество

$$\begin{aligned}
&\frac{b_1}{c_1} x_1 F_A^{(n)}\left(a+1; b_1+1, b_2, \ldots, b_n; c_1+1, c_2, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n\right) + \\
&+\frac{b_2}{c_2} x_2 F_A^{(n)}\left(a+1; b_1, b_2+1, \ldots, b_n; c_1, c_2+1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n\right) + \\
&+\ldots+\frac{b_n}{c_n} x_n F_A^{(n)}\left(a+1; b_1, b_2, \ldots, b_n+1; c_1, c_2, \ldots, c_n+1; x_1, \ldots, x_n\right) = \\
&= F_A^{(n)}\left(a+1; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n\right) - F_A^{(n)}\left(a; b_1, \ldots, b_n; c_1, \ldots, c_n; x_1, \ldots, x_n\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Доказательство леммы 2.1. Левую часть равенства (2.1) обозначим через J и запишем в виде суммы. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ введем под знак суммы

$$\begin{aligned}
J &= \frac{b_1}{c_1} \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n} (b_1+1)_{m_1} (b_2)_{m_2} \ldots (b_n)_{m_n}}{(c_1+1)_{m_1} (c_2)_{m_2} \ldots (c_n)_{m_n} m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1+1} \cdots x_n^{m_n} + \\
&+\frac{b_2}{c_2} \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n} (b_1)_{m_1} (b_2+1)_{m_2} \ldots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} (c_2+1)_{m_2} \ldots (c_n)_{m_n} m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1} x_2^{m_2+1} \cdots x_n^{m_n} + \\
&+\ldots+\frac{b_n}{c_n} \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n} (b_1)_{m_1} (b_2)_{m_2} \ldots (b_n+1)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} (c_2)_{m_2} \ldots (c_n+1)_{m_n} m_1! \ldots m_n!} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n+1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Меняя индексы суммирования, определяем

$$J=\frac{b_1}{c_1}\sum_{m_i=0}^{\infty}\frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n-1}(b_1+1)_{m_1-1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c_1+1)_{m_1-1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}(m_1-1)!\ldots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+$$
$$+\frac{b_2}{c_2}\sum_{m_i=0}^{\infty}\frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n-1}(b_1)_{m_1}(b_2+1)_{m_2-1}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}(c_2+1)_{m_2-1}\ldots(c_n)_{m_n}m_1!(m_2-1)!\ldots m_n!}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}+ \tag{2.3}$$
$$+\ldots+\frac{b_n}{c_n}\sum_{m_i=0}^{\infty}\frac{(a+1)_{m_1+\ldots+m_n-1}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n+1)_{m_n-1}}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n+1)_{m_n-1}m_1!\ldots(m_n-1)!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}.$$

Применяя равенство $(\lambda+1)_{i-1}=(\lambda)_i/\lambda$ к (2.3), получим:

$$J=\frac{1}{a}\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}(m_1+m_2+\ldots+m_n)}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}m_1!\ldots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}=$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}(a+m_1+m_2+\ldots+m_n)}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}m_1!\ldots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}- \tag{2.4}$$
$$-\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(b_1)_{m_1}(b_2)_{m_2}\ldots(b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1}(c_2)_{m_2}\ldots(c_n)_{m_n}m_1!\ldots m_n!}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}.$$

В силу того, что $\frac{(a)_{m_1+\ldots+m_n}(a+m_1+m_2+\ldots+m_n)}{a}=(a+1)_{m_1+\ldots+m_n}$, из (2.4) окончательно получаем тождество (2.1). Лемма доказана.

Таким образом, мы показали справедливость формулы (2.1) для суммы смежных многомерных гипергеометрических функций Лауричеллы $F_A^{(n)}$.

2.1 Построение фундаментальных решений уравнения (H)

Рассмотрим четырехмерное вырождающееся эллиптическое уравнение Геллерстедта:

$$H(u)=y^m z^k t^l u_{xx}+x^n z^k t^l u_{yy}+x^n y^m t^l u_{zz}+x^n y^m z^k u_{tt}=0,\ m,n,k,l\equiv const>0, \tag{2.1.1}$$

в области $R_+^4=\{(x,y,z,t):x>0,y>0,z>0,t>0\}$.

Решения уравнения (H) будем искать в следующем виде:

$$u(x,y,z,t)=P(r)\omega(\xi,\eta,\zeta,\varsigma), \tag{2.1.2}$$

где

$$P(r)=\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1},\ \xi=\frac{r^2-r_1^2}{r^2}\quad \eta=\frac{r^2-r_2^2}{r^2}\quad \zeta=\frac{r^2-r_3^2}{r^2}\quad \varsigma=\frac{r^2-r_4^2}{r^2}, \tag{2.1.3}$$

$$\left.\begin{matrix} r^2\\ r_1^2\\ r_2^2\\ r_3^2\\ r_4^2 \end{matrix}\right\}=\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}\begin{matrix}-\\+\\-\\-\\-\end{matrix}\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)^2+\left(\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}\begin{matrix}-\\-\\+\\-\\-\end{matrix}\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2+$$
$$+\left(\frac{2}{k+2}z^{\frac{k+2}{2}}\begin{matrix}-\\-\\-\\+\\-\end{matrix}\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}\right)^2+\left(\frac{2}{l+2}t^{\frac{l+2}{2}}\begin{matrix}-\\-\\-\\-\\+\end{matrix}\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}\right)^2, \tag{2.1.4}$$

$$\alpha=\frac{n}{2(n+2)},\ \beta=\frac{m}{2(m+2)},\ \gamma=\frac{k}{2(k+2)},\ \delta=\frac{l}{2(l+2)}. \tag{2.1.5}$$

В дальнейшем с целью сокращения записи, аргументы функций в (2.1.2) будем опускать. Здесь (x,y,z,t) - произвольная, а $\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)$ – фиксированная точка из области R_+^4. Подставляя (2.1.2) в (2.1.1), получаем:

$$\begin{gathered}PA_1\omega_{\xi\xi}+PA_2\omega_{\eta\eta}+PA_3\omega_{\zeta\zeta}+PA_4\omega_{\varsigma\varsigma}+2PB_1\omega_{\xi\eta}+2PB_2\omega_{\xi\zeta}+2PB_3\omega_{\xi\varsigma}+2PB_4\omega_{\eta\zeta}+2PB_5\omega_{\eta\varsigma}+\\+2PB_6\omega_{\zeta\varsigma}+C_1\omega_\xi+C_2\omega_\eta+C_3\omega_\zeta+C_4\omega_\varsigma+D\omega=0,\end{gathered} \tag{2.1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1&=y^m z^k t^l\xi_x^2+x^n z^k t^l\xi_y^2+x^n y^m t^l\xi_z^2+x^n y^m z^k\xi_t^2,\\
A_2&=y^m z^k t^l\eta_x^2+x^n z^k t^l\eta_y^2+x^n y^m t^l\eta_z^2+x^n y^m z^k\eta_t^2,\\
A_3&=y^m z^k t^l\zeta_x^2+x^n z^k t^l\zeta_y^2+x^n y^m t^l\zeta_z^2+x^n y^m z^k\zeta_t^2,\\
A_4&=y^m z^k t^l\varsigma_x^2+x^n z^k t^l\varsigma_y^2+x^n y^m t^l\varsigma_z^2+x^n y^m z^k\varsigma_t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1&=y^m z^k t^l\xi_x\eta_x+x^n z^k t^l\xi_y\eta_y+x^n y^m t^l\xi_z\eta_z+x^n y^m z^k\xi_t\eta_t,\\
B_2&=y^m z^k t^l\xi_x\zeta_x+x^n z^k t^l\xi_y\zeta_y+x^n y^m t^l\xi_z\zeta_z+x^n y^m z^k\xi_t\zeta_t,\\
B_3&=y^m z^k t^l\xi_x\varsigma_x+x^n z^k t^l\xi_y\varsigma_y+x^n y^m t^l\xi_z\varsigma_z+x^n y^m z^k\xi_t\varsigma_t,\\
B_4&=y^m z^k t^l\eta_x\zeta_x+x^n z^k t^l\eta_y\zeta_y+x^n y^m t^l\eta_z\zeta_z+x^n y^m z^k\eta_t\zeta_t,\\
B_5&=y^m z^k t^l\eta_x\varsigma_x+x^n z^k t^l\eta_y\varsigma_y+x^n y^m t^l\eta_z\varsigma_z+x^n y^m z^k\eta_t\varsigma_t,\\
B_6&=y^m z^k t^l\zeta_x\varsigma_x+x^n z^k t^l\zeta_y\varsigma_y+x^n y^m t^l\zeta_z\varsigma_z+x^n y^m z^k\zeta_t\varsigma_t,
\end{aligned}$$

$$C_1 = y^m z^k t^l \left(P\xi_{xx} + 2P_x\xi_x\right) + x^n z^k t^l \left(P\xi_{yy} + 2P_y\xi_y\right) + x^n y^m t^l \left(P\xi_{zz} + 2P_z\xi_z\right) + x^n y^m z^k \left(P\xi_{tt} + 2P_t\xi_t\right),$$
$$C_2 = y^m z^k t^l \left(P\eta_{xx} + 2P_x\eta_x\right) + x^n z^k t^l \left(P\eta_{yy} + 2P_y\eta_y\right) + x^n y^m t^l \left(P\eta_{zz} + 2P_z\eta_z\right) + x^n y^m z^k \left(P\eta_{tt} + 2P_t\eta_t\right),$$
$$C_3 = y^m z^k t^l \left(P\zeta_{xx} + 2P_x\zeta_x\right) + x^n z^k t^l \left(P\zeta_{yy} + 2P_y\zeta_y\right) + x^n y^m t^l \left(P\zeta_{zz} + 2P_z\zeta_z\right) + x^n y^m z^k \left(P\zeta_{tt} + 2P_t\zeta_t\right),$$
$$C_4 = y^m z^k t^l \left(P\omega_\varsigma\varsigma_{xx} + 2P_x\varsigma_x\right) + x^n z^k t^l \left(P\varsigma_{yy} + 2P_y\varsigma_y\right) + x^n y^m t^l \left(P\varsigma_{zz} + 2P_z\varsigma_z\right) + x^n y^m z^k \left(P\varsigma_{tt} + 2P_t\varsigma_t\right),$$
$$D = y^m z^k t^l P_{xx} + x^n z^k t^l P_{yy} + x^n y^m t^l P_{zz} + x^n y^m z^k P_{tt}.$$

После некоторых вычислений, мы имеем

$$A_1 = -\Lambda_1\xi(1-\xi),\ A_2 = -\Lambda_2\eta(1-\eta),\ A_3 = -\Lambda_3\zeta(1-\zeta),\ A_4 = -\Lambda_4\varsigma(1-\varsigma), \tag{2.1.7}$$

$$\begin{gathered} B_1 = \frac{1}{2}\Lambda_1\xi\eta + \frac{1}{2}\Lambda_2\xi\eta,\ B_2 = \frac{1}{2}\Lambda_1\xi\zeta + \frac{1}{2}\Lambda_3\xi\zeta,\ B_3 = \frac{1}{2}\Lambda_1\xi\varsigma + \frac{1}{2}\Lambda_4\xi\varsigma, \\ B_4 = \frac{1}{2}\Lambda_2\eta\zeta + \frac{1}{2}\Lambda_3\eta\zeta,\ B_5 = \frac{1}{2}\Lambda_2\eta\varsigma + \frac{1}{2}\Lambda_4\eta\varsigma,\ B_6 = \frac{1}{2}\Lambda_3\zeta\varsigma + \frac{1}{2}\Lambda_4\zeta\varsigma, \end{gathered} \tag{2.1.8}$$

$$\begin{gathered} C_1 = -P\left\{\Lambda_1\left[2\alpha - \left(\alpha + (\alpha+\beta+\gamma+\delta+1) + 1\right)\xi\right] - \beta\Lambda_2\xi - \gamma\Lambda_3\xi - \delta\Lambda_4\xi\right\}, \\ C_2 = P\left\{\alpha\Lambda_1\eta - \Lambda_2\left[2\beta - \left(\beta + (\alpha+\beta+\gamma+\delta+1) + 1\right)\eta\right] + \gamma\Lambda_3\eta + \delta\Lambda_4\eta\right\}, \\ C_3 = P\left\{\alpha\Lambda_1\zeta + \beta\Lambda_2\zeta - \Lambda_3\left[2\gamma - \left(\gamma + (\alpha+\beta+\gamma+\delta+1) + 1\right)\zeta\right] + \delta\Lambda_4\zeta\right\}, \\ C_4 = P\left\{\alpha\Lambda_1\varsigma + \beta\Lambda_2\varsigma + \gamma\Lambda_3\varsigma - \Lambda_4\left[2\delta - \left(\delta + (\alpha+\beta+\gamma+\delta+1) + 1\right)\varsigma\right]\right\}, \end{gathered} \tag{2.1.9}$$

$$\begin{gathered} D = P\left[\Lambda_1(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\alpha + \Lambda_2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\beta \right. \\ \left. + \Lambda_3(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\gamma + \Lambda_4(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\delta\right], \end{gathered} \tag{2.1.10}$$

где

$$\begin{gathered} \Lambda_1 = \Lambda_0 x_0^{\frac{n+2}{2}} x^{-\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \Lambda_2 = \Lambda_0 y_0^{\frac{m+2}{2}} y^{-\left(\frac{m+2}{2}\right)}, \Lambda_3 = \Lambda_0 z_0^{\frac{k+2}{2}} z^{-\left(\frac{k+2}{2}\right)}, \\ \Lambda_4 = \Lambda_0 t_0^{\frac{l+2}{2}} t^{-\left(\frac{l+2}{2}\right)},\ \Lambda_0 = \frac{4x^n y^m z^k t^l}{\left(r^2\right)}. \end{gathered} \tag{2.1.11}$$

Подставляя найденные выражения (2.1.7)–(2.1.10) в уравнение (2.1.6) после некоторых преобразований, мы получаем следующее равенство:

$$
\begin{aligned}
&-\Lambda_1\Big\{\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}-\xi\zeta\omega_{\xi\zeta}-\xi\varsigma\omega_{\xi\varsigma}+\big[2\alpha-\big(\alpha+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\xi\big]\omega_\xi-\\
&-\alpha\eta\omega_\eta-\alpha\varsigma\omega_\varsigma-\alpha\zeta\omega_\zeta-\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega\Big\}-\\
&-\Lambda_2\Big\{\eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}-\eta\zeta\omega_{\eta\zeta}-\eta\varsigma\omega_{\eta\varsigma}-\beta\xi\omega_\xi+\big[2\beta-\big(\beta+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\eta\big]\\
&\times\omega_\eta-\beta\varsigma\omega_\varsigma-\beta\zeta\omega_\zeta-\beta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega\Big\}-\\
&-\Lambda_3\Big\{\zeta(1-\zeta)\omega_{\zeta\zeta}-\xi\zeta\omega_{\xi\zeta}-\eta\zeta\omega_{\eta\zeta}-\zeta\varsigma\omega_{\zeta\varsigma}-\gamma\xi\omega_\xi-\gamma\eta\omega_\eta-\gamma\varsigma\omega_\varsigma+\\
&+\big[2\gamma-\big(\gamma+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\zeta\big]\omega_\zeta-\gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega\Big\}-\\
&-\Lambda_4\Big\{\varsigma(1-\varsigma)A_4\omega_{\varsigma\varsigma}-\xi\varsigma\omega_{\xi\varsigma}-\eta\varsigma\omega_{\eta\varsigma}-\zeta\varsigma\omega_{\zeta\varsigma}-\delta\xi\omega_\xi-\delta\eta\omega_\eta-\\
&-\delta\zeta\omega_\zeta+\big[2\delta-\big(\delta+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\varsigma\big]\omega_\varsigma-\delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega\Big\}=0.
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

Так как в (2.1.12) $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3,\Lambda_4\neq 0$ и линейно независимы, то получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гипергеометрического типа:

$$
\begin{cases}
\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}-\xi\zeta\omega_{\xi\zeta}-\xi\varsigma\omega_{\xi\varsigma}+\big[2\alpha-\big(\alpha+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\xi\big]\omega_\xi-\\
-\alpha\eta\omega_\eta-\alpha\zeta\omega_\zeta-\alpha\varsigma\omega_\varsigma-\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega=0,\\
\eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta}-\xi\eta\omega_{\xi\eta}-\eta\zeta\omega_{\eta\zeta}-\eta\varsigma\omega_{\eta\varsigma}-\beta\xi\omega_\xi+\big[2\beta-\big(\beta+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\eta\big]\omega_\eta-\\
-\beta\zeta\omega_\zeta-\beta\varsigma\omega_\varsigma-\beta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega=0,\\
\zeta(1-\zeta)\omega_{\zeta\zeta}-\xi\zeta\omega_{\xi\zeta}-\eta\zeta\omega_{\eta\zeta}-\zeta\varsigma\omega_{\zeta\varsigma}-\gamma\xi\omega_\xi-\gamma\eta\omega_\eta+\\
+\big[2\gamma-\big(\gamma+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\zeta\big]\omega_\zeta-\gamma\varsigma\omega_\varsigma-\gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega=0,\\
\varsigma(1-\varsigma)\omega_{\varsigma\varsigma}-\xi\varsigma\omega_{\xi\varsigma}-\eta\varsigma\omega_{\eta\varsigma}-\zeta\varsigma\omega_{\zeta\varsigma}-\delta\xi\omega_\xi-\delta\eta\omega_\eta-\\
-\delta\zeta\omega_\zeta+\big[2\delta-\big(\delta+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)+1\big)\varsigma\big]\omega_\varsigma-\delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\omega=0.
\end{cases}
\tag{2.1.13}
$$

(2.1.13) является системой дифференциальных уравнений Лауричеллы в случае четырех переменных [1, с. 117]. Линейно независимые решения данной системы в силу результатов работы [1, с. 118], учитывая обозначение (2.1.2), записываются в виде шестнадцати гипергеометрических функций:

$$
g_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_1PF_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma),\tag{2.1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_2(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=\\
&\qquad=k_2P\xi^{1-2\alpha}F_A^{(4)}(2-\alpha+\beta+\gamma+\delta;1-\alpha,\beta,\gamma,\delta;2-2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma),
\end{aligned}
\tag{2.1.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_3(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=\\
&\qquad=k_3P\eta^{1-2\beta}F_A^{(4)}(2+\alpha-\beta+\gamma+\delta;\alpha,1-\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2-2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma),
\end{aligned}
\tag{2.1.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_4\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&\qquad=k_4P\zeta^{1-2\gamma}F_A^{(4)}\left(2+\alpha+\beta-\gamma+\delta;\alpha,\beta,1-\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2-2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_5\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&\qquad=k_5P\varsigma^{1-2\delta}F_A^{(4)}\left(2+\alpha+\beta+\gamma-\delta;\alpha,\beta,\gamma,1-\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2-2\delta;\xi^m\eta^n\zeta^p\varsigma^q\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_6\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_6P\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}F_A^{(4)}\left(3-\alpha-\beta+\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,\gamma,\delta;2-2\alpha\ ,2-2\beta\ ,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_7\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_7P\xi^{1-2\alpha}\zeta^{1-2\gamma}F_A^{(4)}\left(3-\alpha+\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,\beta,1-\gamma,\delta;2-2\alpha,2\beta,2-2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_8\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_8P\xi^{1-2\alpha}\varsigma^{1-2\delta}F_A^{(4)}\left(3-\alpha+\beta+\gamma-\delta;1-\alpha,\beta,\gamma,1-\delta;2-2\alpha,2\beta,2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_9\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_9P\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}F_A^{(4)}\left(3+\alpha-\beta-\gamma+\delta;\alpha,1-\beta,1-\gamma,\delta;2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{10}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_{10}P\eta^{1-2\beta}\varsigma^{1-2\delta}F_A^{(4)}\left(3+\alpha-\beta+\gamma-\delta;\alpha,1-\beta,\gamma,1-\delta;2\alpha,2-2\beta,2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{11}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\
&=k_{11}P\zeta^{1-2\gamma}\varsigma^{1-2\delta}F_A^{(4)}\left(3+\alpha+\beta-\gamma-\delta;\alpha,\beta,1-\gamma,1-\delta;2\alpha,2\beta,2-2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{12}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{12}P\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}\times\\
&\qquad\times F_A^{(4)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.25}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{13}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{13}P\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\varsigma^{1-2\delta}\times\\
&\qquad\times F_A^{(4)}\left(4-\alpha-\beta+\gamma-\delta;1-\alpha,1-\beta,\gamma,1-\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{14}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{14}P\xi^{1-2\alpha}\zeta^{1-2\gamma}\varsigma^{1-2\delta}\times\\
&\qquad\times F_A^{(4)}\left(4-\alpha+\beta-\gamma-\delta;1-\alpha,\beta,1-\gamma,1-\delta;2-2\alpha,\beta,2-2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_{15}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{15}P\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}\varsigma^{1-2\delta}\times\\
&\qquad\times F_A^{(4)}\left(4+\alpha-\beta-\gamma-\delta;\alpha,1-\beta,1-\gamma,1-\delta;2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right),
\end{aligned}
\tag{2.1.28}
$$

$$g_{16}\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{16}P\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}\varsigma^{1-2\delta}\times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(5-\alpha-\beta-\gamma-\delta;1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,1-\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right). \tag{2.1.29}$$

Установим некоторые свойства линейно независимых решений системы (2.1.13), представленных гипергеометрическими функциями (2.1.14) – (2.1.29).

Теорема 2.1.1. Если параметры вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка (2.1.1) удовлетворяют условию $0<m,n,k,l<\infty$, то частные решения (2.1.14) – (2.1.29) имеют особенность порядка $\frac{1}{r^2}$, при $r\to 0$.

Доказательство теоремы 2.1.1. Рассмотрим частное решение (2.1.14). В силу обозначений (2.1.3) и воспользовавшись формулами (1.1.15) и (1.1.56), получаем:

$$g_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;1-\frac{r_1^2}{r^2},1-\frac{r_2^2}{r^2},1-\frac{r_3^2}{r^2},1-\frac{r_4^2}{r^2}\right)= \tag{2.1.30}$$
$$=k_1\left(r^2\right)^{-1}\left(r_1^2\right)^{-\alpha}\left(r_2^2\right)^{-\beta}\left(r_3^2\right)^{-\gamma}\left(r_4^2\right)^{-\delta}f\left(r^2,r_1^2,r_2^2,r_3^2,r_4^2\right),$$

где

$$f\left(r^2,r_1^2,r_2^2,r_3^2,r_4^2\right)=$$
$$=\sum_{m_2,m_3,m_4,i,j,k=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)_{m_2+m_3+m_4+i+j+k}\left(\alpha\right)_{m_2+m_3+m_4}\left(\beta\right)_{m_2+i+j}\left(\gamma\right)_{m_3+i+k}\left(\delta\right)_{m_4+j+k}}{\left(2\alpha\right)_{m_2+m_3+m_4}\left(2\beta\right)_{m_2+i+j}\left(2\gamma\right)_{m_3+i+k}\left(2\delta\right)_{m_4+j+k}m_2!m_3!m_4!i!j!k!}\times$$
$$\times\left(\frac{r^2}{r_1^2}-1\right)^{m_2+m_3+m_4}\left(\frac{r^2}{r_2^2}-1\right)^{m_2+i+j}\left(\frac{r^2}{r_3^2}-1\right)^{m_3+i+k}\left(\frac{r^2}{r_4^2}-1\right)^{m_4+j+k}\times$$
$$\times F\left(\alpha-\beta-\gamma-\delta-1,\alpha+m_2+m_3+m_4;2\alpha+m_2+m_3+m_4;\frac{r_1^2-r^2}{r_1^2}\right)\times$$
$$\times F\left(\beta-\alpha-\gamma-\delta-1-m_3-m_4,\beta+m_2+i+j;2\beta+m_2+i+j;\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)\times$$
$$\times F\left(\gamma-\alpha-\beta-\delta-1-m_2-m_4-j,\gamma+m_3+i+k;2\gamma+m_3+i+k;\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)\times$$
$$\times F\left(\delta-\alpha-\beta-\gamma-1-m_2-m_3-i,\delta+m_4+j+k;2\delta+m_4+j+k;\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right). \tag{2.1.31}$$

В (2.1.31) при $r\to 0$ множители, которыми являются гипергеометрические функции Гаусса, после применения формулы (1.1.28) и свойств оператора Похгаммера, преобразуются к следующему виду:

$$F\left(\alpha-\beta-\gamma-\delta-1,\alpha+m_2+m_3+m_4;2\alpha+m_2+m_3+m_4;\frac{r_1^2-r^2}{r_1^2}\right)\Bigg|_{r=0}=$$
$$=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\beta+\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\frac{(2\alpha)_{m_2+m_3+m_4}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)_{m_2+m_3+m_4}},\tag{2.1.32}$$

$$F\left(\beta-\alpha-\gamma-\delta-1-m_3-m_4,\beta+m_2+i+j;2\beta+m_2+i+j;\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)\Bigg|_{r=0}=$$
$$=\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma(\alpha+\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\frac{(2\beta)_{m_2+i+j}(\alpha+\gamma+\delta+1)_{m_3+m_4}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)_{m_2+m_3+m_4+i+j}},\tag{2.1.33}$$

$$F\left(\gamma-\alpha-\beta-\delta-1-m_2-m_4-j,\gamma+m_3+i+k;2\gamma+m_3+i+k;\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)\Bigg|_{r=0}=$$
$$=\frac{\Gamma(2\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\delta+1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\frac{(2\gamma)_{m_3+i+k}(\alpha+\beta+\delta+1)_{m_2+m_4+j}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)_{m_2+m_3+m_4+i+j+k}},\tag{2.1.34}$$

$$F\left(\delta-\alpha-\beta-\gamma-1-m_2-m_3-i,\delta+m_4+j+k;2\delta+m_4+j+k;\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right)\Bigg|_{r=0}=$$
$$=\frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\frac{(2\delta)_{m_4+j+k}(\alpha+\beta+\gamma+1)_{m_2+m_3+i}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)_{m_2+m_3+m_4+i+j+k}}.\tag{2.1.35}$$

Подставляя соотношения (2.1.32) – (2.1.35) в разложение (2.1.31), имеем

$$f\left(0,r_1^2,r_2^2,r_3^2,r_4^2\right)=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\frac{\Gamma(\beta+\gamma+\delta+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\times$$
$$\times\sum_{m_2,m_3,m_4=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_2+m_3+m_4}(\beta)_{m_2}(\gamma)_{m_3}(\delta)_{m_4}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)_{m_2+m_3+m_4}m_2!m_3!m_4!},$$

здесь в силу формулы (1.1.28) для трехмерного случая, окончательно имеем:

$$f\left(0,r_1^2,r_2^2,r_3^2,r_4^2\right)=\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}.\tag{2.1.36}$$

Выражения (2.2.1) и (2.1.32) позволяют нам сделать выводы, что решение $g_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$ стремится к бесконечности порядка $\left(r^2\right)^{-1}$ при $r\to 0,$ то есть

$$g_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)\Big|_{r=0}=$$

$$=\frac{k_1\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}\frac{\left(r_1^2\right)^{-\alpha}\left(r_2^2\right)^{-\beta}\left(r_3^2\right)^{-\gamma}\left(r_4^2\right)^{-\delta}}{r^2}\Bigg|_{r=0}\to\infty.$$

Аналогично устанавливается, что решения (2.1.15) – (2.1.29) уравнения (2.1.1) также обращаются в бесконечность порядка r^{-2} при $r\to 0$.

Следовательно, решения (2.1.14) – (2.1.29) являются фундаментальными решениями уравнения (2.1.1). Теорема 2.1.1 доказана.

2.2 Свойства фундаментальных решений

Теорема 2.2.1. Если параметры вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка (2.1.1) удовлетворяют условиям $0<m,n,k,l<\infty$, то частные решения (2.1.14)–(2.1.29) обладают свойствами:

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_1\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_1\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_1\Big|_{t=0}=0,$$

$$g_2\big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_2\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_2\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_2\Big|_{t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g_3\Big|_{x=0}=0,\quad g_3\big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_3\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_3\Big|_{t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g_4\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_4\Big|_{y=0}=0,\quad g_4\big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_4\Big|_{t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}g_5\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_5\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_5\Big|_{z=0}=0,\quad g_5\big|_{t=0}=0,$$

$$g_6\big|_{x=0}=0,\quad g_6\big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_6\Big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_6\Big|_{t=0}=0,$$

$$g_7\big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_7\Big|_{y=0}=0,\quad g_7\big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}g_7\Big|_{t=0}=0,$$

$$g_8\big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}g_8\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}g_8\Big|_{z=0}=0,\quad g_8\big|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_9\right|_{x=0}=0,\qquad g_9\big|_{y=0}=0,\qquad g_9\big|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}g_9\right|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_{10}\right|_{x=0}=0,\qquad g_{10}\big|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}g_{10}\right|_{z=0}=0,\qquad g_{10}\big|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_{11}\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial y}g_{11}\right|_{y=0}=0,\qquad g_{11}\big|_{z=0}=0,\qquad g_{11}\big|_{t=0}=0,$$

$$g_{12}\big|_{x=0}=0,\qquad g_{12}\big|_{y=0}=0,\qquad g_{12}\big|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}g_{12}\right|_{t=0}=0,$$

$$g_{13}\big|_{x=0}=0,\qquad g_{13}\big|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}g_{13}\right|_{z=0}=0,\qquad g_{13}\big|_{t=0}=0,$$

$$g_{14}\big|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial y}g_{14}\right|_{y=0}=0,\qquad g_{14}\big|_{z=0}=0,\qquad g_{14}\big|_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_{15}\right|_{x=0}=0,\qquad g_{15}\big|_{y=0}=0,\qquad g_{15}\big|_{z=0}=0,\qquad g_{15}\big|_{t=0}=0,$$

$$g_{16}\big|_{x=0}=0,\qquad g_{16}\big|_{y=0}=0,\qquad g_{16}\big|_{z=0}=0,\qquad g_{16}\big|_{t=0}=0.$$

Доказательство теоремы 2.2.1. Приведенные свойства доказываются с помощью формулы дифференцирования гипергеометрических функций.

Докажем свойство

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}g_1\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial y}g_1\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}g_1\right|_{z=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial}{\partial t}g_1\right|_{t=0}=0. \tag{2.2.1}$$

Дифференцируя (2.1.14) по x, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1 = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]=$$
$$=\left(-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1\right)F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\left(r^2\right)_x\times$$
$$+\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\left[F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]_\xi\xi_x+$$
$$+\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\left[F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]_\eta\eta_x+$$
$$+\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\left[F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]_\zeta\zeta_x+$$
$$+\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\left[F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]_\varsigma\varsigma_x.$$

Применим здесь формулу дифференцирования (1.1.57). После некоторых вычислений и преобразований, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1 = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]=$$
$$=2x^{\frac{n}{2}}\left(-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)-$$
$$-2x^{\frac{n}{2}}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}$$
$$\times\left\{\frac{(\alpha)_1}{(2\alpha)_1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)2\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}+\right.$$
$$+\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{(\alpha)_1}{(2\alpha)_1}\xi F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+\right.$$
$$+\frac{(\beta)_1}{(2\beta)_1}\eta F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta+1,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta+1,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+$$
$$+\frac{(\gamma)_1}{(2\gamma)_1}\zeta F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma+1,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma+1,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+$$
$$\left.\left.+\frac{(\delta)_1}{(2\delta)_1}\varsigma F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta+1;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta+1;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]\right\},$$

здесь $\dfrac{(\alpha)_1}{(2\alpha)_1}=\dfrac{\alpha}{2\alpha}.$

Используя формулу (2.1) в случае $n=4$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1 = 2x^{\frac{n}{2}}\left(-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$

$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)$$

$$-2x^{\frac{n}{2}}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\alpha}{2\alpha}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)2\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}+\right.$$

$$+\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)\left[F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)-\right.$$

$$\left.\left.-F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]\right\}.$$

Проводя в последнем выражении преобразования, окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial x}g_1 = k_1\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]=$$

$$=-2x^{\frac{n}{2}}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$

$$\times\left\{\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right\}.$$

Из предыдущего выражения при $x\to 0$ $(\xi\to 0)$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}}-\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right\}=0.$$

Значит $k_1\lim\limits_{x\to 0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\right]=0.$

Подобно доказательству свойства (2.2.1) можно доказать все остальные свойства. Теорема 2.2.1 доказана. Указанные свойства будут применены при решении краевых задач для уравнения (H).

3 РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ (H) В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В данном разделе будут решены краевые задачи для обобщенного уравнения Геллерстедта от четырех переменных (H) (2.1.1) в бесконечной области. В решениях краевых задач будут участвовать некоторые из найденных шестнадцати фундаментальных решений (2.1.14) – (2.1.29). Каждое из полученных фундаментальных решений является решением соответствующей краевой задачи. Таким образом, для уравнения (H) будут сформулированы задачи N^{∞}, D^{∞}, ND_1^{∞}, ND_2^{∞}, ND_3^{∞}, далее будут доказаны теоремы единственности и существования решения краевых задач.

3.1 Постановка краевых задач N^{∞}, D^{∞}, ND_1^{∞}, ND_2^{∞}, ND_3^{∞}

Пусть уравнение (H) рассматривается в области:

$$D=\left\{(x,y,z,t): x>0, y>0, z>0, t>0\right\},$$
$$S_1=\left\{(0,y,z,t): x=0, y>0, z>0, t>0\right\},$$
$$S_2=\left\{(x,0,z,t): x>0, y=0, z>0, t>0\right\},$$
$$S_3=\left\{(x,y,0,t): x>0, y>0, z=0, t>0\right\},$$
$$S_4=\left\{(x,y,\mathrm{z},0): x>0, y>0, z>0, t=0\right\},$$
$$R^2=\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}.$$

Задача N^{∞}. Найти регулярное решение $u(x,y,z,t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}u(x,y,z,t)\right|_{x=0}=\nu_1(y,z,t),\quad (y,z,t)\in S_1, \tag{3.1.1}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}u(x,y,z,t)\right|_{y=0}=\nu_2(x,z,t),\quad (x,z,t)\in S_2, \tag{3.1.2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z,t)\right|_{z=0}=\nu_3(x,y,t),\quad (x,y,t)\in S_3, \tag{3.1.3}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)\right|_{t=0}=\nu_4(x,y,\mathrm{z}),\quad (x,y,\mathrm{z})\in S_4, \tag{3.1.4}$$

$$\lim_{R\to\infty} u(x,y,z,t)=0, \tag{3.1.5}$$

где $\nu_1(y,z,t)$, $\nu_2(x,z,t)$, $\nu_3(x,y,t)$, $\nu_4(x,y,\mathrm{z})$ – заданные непрерывные функции.

Причем функции $\nu_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ удовлетворяют следующим условиям:

1)
$$\begin{gathered}\iiint\limits_{S_1} y^m z^k t^l \nu_1(y,z,t)\,dydzdt+\iiint\limits_{S_2} x^n z^k t^l \nu_2(x,z,t)\,dxdzdt+\\ +\iiint\limits_{S_3} x^k y^m t^l \nu_3(x,y,t)\,dxdydt+\iiint\limits_{S_4} x^k y^m t^l \nu_4(x,y,\mathrm{z})\,dxdydz=0;\end{gathered} \tag{3.1.6}$$

2) функции $\nu_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ при $R\to 0$ могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка;

3) при достаточно больших значениях R выполняются неравенства

$$\left|\nu_1(y,z,t)\right|\le \frac{c_1}{\left[1+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\frac{1-2\alpha+\varepsilon_1}{2}}}, \tag{3.1.7}$$

$$\left|\nu_2(x,z,t)\right|\le \frac{c_2}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\frac{1-2\beta+\varepsilon_2}{2}}}, \tag{3.1.8}$$

$$\left|\nu_3(x,y,t)\right|\le \frac{c_3}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\frac{1-2\gamma+\varepsilon_3}{2}}}, \tag{3.1.9}$$

$$\left|\nu_4(x,y,z)\right|\le \frac{c_4}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}\right]^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}}, \tag{3.1.10}$$

здесь $c_1,c_2,c_3,c_4>0$ и $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ - достаточно малые положительные числа.

Задача D^∞. Найти регулярное решение $u(x,y,z,t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C\left(\bar{D}\right)\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям (3.1.5),

$$u(x,y,z,t)\big|_{x=0}=\tau_1(y,z,t),\quad (y,z,t)\in\overline{S_1}, \tag{3.1.11}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{y=0}=\tau_2(x,z,t),\quad (x,z,t)\in\overline{S_2}, \tag{3.1.12}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{z=0}=\tau_3(x,y,t),\quad (x,y,t)\in\overline{S_3}, \tag{3.1.13}$$

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\tau_4(x,y,\mathrm{z}),\quad (x,y,\mathrm{z})\in\overline{S_4}, \tag{3.1.14}$$

где $\tau_1(y,z,t)$, $\tau_2(x,z,t)$, $\tau_3(x,y,t)$, $\tau_4(x,y,\mathrm{z})$ – заданные непрерывные функции. Причем при достаточно больших значениях R выполняются неравенства

$$\left|\tau_1(y,z,t)\right|\le\frac{c_5}{\left[1+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\varepsilon_5}}, \tag{3.1.15}$$

$$\left|\tau_2(x,z,t)\right|\le\frac{c_6}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\varepsilon_6}}, \tag{3.1.16}$$

$$\left|\tau_3(x,y,t)\right|\le\frac{c_7}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}\right]^{\varepsilon_7}}, \tag{3.1.17}$$

$$\left|\tau_4(x,y,\mathrm{z})\right|\le\frac{c_8}{\left[1+\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}\right]^{\varepsilon_8}}, \tag{3.1.18}$$

где $c_5,c_6,c_7,c_8>0$ и $\varepsilon_5,\varepsilon_6,\varepsilon_7,\varepsilon_8$ достаточно малые положительные числа.

Задача ND_1^∞. Найти регулярное решение $u(x,y,z,t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D\cup\overline{S_4})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям (3.1.4), (3.1.5), (3.1.11) – (3.1.13), причем $\nu_4(x,y,\mathrm{z})$ при $R\to 0$ может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Также при достаточно больших значениях R выполняются неравенства (3.1.10), (3.1.15) – (3.1.17).

Задача ND_2^∞. Найти регулярное решение $u(x,y,z,t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D\cup\overline{S_3}\cup\overline{S_4})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям (3.1.3) – (3.1.5), (3.1.11), (3.1.12), причем $\nu_3(x,y,t)$, $\nu_4(x,y,\mathrm{z})$ при $R\to 0$ могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Также при достаточно больших значениях R выполняются неравенства (3.1.9), (3.1.10), (3.1.15), (3.1.16).

Задача ND_3^∞. Найти регулярное решение $u(x,y,z,t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C(\bar{D})\cap C^1(D\cup\overline{S_2}\cup\overline{S_3}\cup\overline{S_4})\cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям (3.1.2) –

(3.1.5), (3.1.11), причем при $R \to 0$ $\nu_2(x,z,t)$, $\nu_3(x,y,t)$, $\nu_4(x,y,z)$ могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Также при достаточно больших значениях R выполняются неравенства (3.1.8) – (3.1.10), (3.1.15).

3.2 Теоремы единственности

Теорема 3.2.1. Каждая из задач D^∞, ND_1^∞, ND_2^∞, ND_3^∞ имеет не более одного решения.

Теорема 3.2.2. Пусть выполнены условия 1) – 3), тогда задача N^∞ имеет не более одного решения.

Доказательство теоремы 3.2.1. Рассмотрим однородный случай для каждой из задач. Необходимо показать, что задачи будут иметь тривиальные решения. Для этого обозначим конечную часть области D, ограниченную гиперплоскостями S_1, S_2, S_3, S_4 и поверхностью σ_R:

$$\left\{\begin{matrix}(x,y,z,t): \dfrac{4}{(n+2)^2}x^{n+2} + \dfrac{4}{(m+2)^2}y^{m+2} + \dfrac{4}{(k+2)^2}z^{k+2} + \dfrac{4}{(l+2)^2}t^{l+2} = R^2, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, t \ge 0\end{matrix}\right\},$$

посредством D_R.

Если выполняется равенство

$$\begin{aligned}&\nu_1(y,z,t) = \nu_2(x,z,t) = \nu_3(x,y,t) = \nu_4(x,y,z) = \\ &\quad = \tau_1(y,z,t) = \tau_2(x,z,t) = \tau_3(x,y,t) = \tau_4(x,y,z) \equiv 0,\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

то, пользуясь принципом максимума, покажем справедливость утверждения теоремы. Действительно, функция $u(x,y,z,t)$ в области $\overline{D_R}$ в силу (3.1.19) может достигнуть своего положительного максимума и отрицательного минимума только на поверхности σ_R. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и учитывая условие (3.1.5), выберем R настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $|u(x,y,z,t)| < \varepsilon$ на σ_R. Пусть (x_0, y_0, z_0, t_0) - произвольная точка области D. При достаточно большом значении R точка (x_0, y_0, z_0, t_0) попадает в область D_R и следовательно $|u(x_0, y_0, z_0, t_0)| < \varepsilon$. Так как ε произвольное число, значит $u(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0$. Тогда $u(x,y,z,t) \equiv 0$ в области D. Таким образом, теорема 3.2.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2.2. Пусть u это решение однородной задачи N^∞. Тогда ясно, что функция u удовлетворяет уравнению (2.1.1), однородным граничным условиям (3.1.1) - (3.1.4) и условию (3.1.5).

Пусть $\delta > 0$ достаточно малое число. Через D_R^δ обозначим ограниченную область из D_R с границей $\partial D_R^\delta = S_{1\delta} \cup S_{2\delta} \cup S_{3\delta} \cup S_{4\delta} \cup \sigma'_R$, где
$S_{1\delta} = S_1 \cap \{x = 0, 0 < y < \delta, 0 < z < \delta, 0 < t < \delta\}$, $S_{2\delta} = S_2 \cap \{0 < x < \delta, y = 0, 0 < z < \delta, 0 < t < \delta\}$,
$S_{3\delta} = S_3 \cap \{0 < x < \delta, 0 < y < \delta, z = 0, 0 < t < \delta\}$, $S_{4\delta} = S_4 \cap \{0 < x < \delta, 0 < y < \delta, 0 < z < \delta, t = 0\}$,
σ'_R это часть поверхности

$$\sigma_R = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z,t): \dfrac{4}{(n+2)^2} x^{n+2} + \dfrac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} + \dfrac{4}{(k+2)^2} z^{k+2} + \dfrac{4}{(l+2)^2} t^{l+2} = R^2, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, t \ge 0 \end{array} \right\},$$

ограниченной гиперплоскостями S_1, S_2, S_3, S_4.

Выбирая R достаточно большим значением, проинтегрируем уравнение (2.1.1) по области D_R^δ, предварительно умножив его на функцию $u(x,y,z,t)$, получим

$$\iiiint\limits_{D_R^\delta} \left[y^m z^k t^l u u_{xx} + x^n z^k t^l u u_{yy} + x^n y^m t^l u u_{zz} + x^n y^m z^k u u_{tt} \right] dxdydzdt = 0. \qquad (3.2.2)$$

С учетом в (3.2.2) следующих равенств

$$y^m z^k t^l u u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^m z^k t^l u u_x \right) - y^m z^k t^l u_x^2, \qquad x^n z^k t^l u u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^n z^k t^l u u_y \right) - x^n z^k t^l u_y^2,$$
$$x^n y^m t^l u u_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^n y^m t^l u u_z \right) - x^n y^m t^l u_z^2, \qquad x^n y^m z^k u u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(x^n y^m z^k u u_t \right) - x^n y^m z^k u_t^2,$$

после применения формулы Гаусса-Остроградского получим

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_{D_R^\delta} \left[y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right] dxdydzdt = \iiint\limits_{S_{1\delta}} y^m z^k t^l u \nu_1 dydzdt + \\ &+ \iiint\limits_{S_{2\delta}} x^n z^k t^l u \nu_2 dxdzdt + \iiint\limits_{S_{3\delta}} x^n y^m t^l u \nu_3 dxdydt + \iiint\limits_{S_{4\delta}} x^n y^m z^k u \nu_4 dxdydz + \iiint\limits_{\sigma'_R} u A_\sigma[u] dS, \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

где

$$A_\sigma[u] \equiv y^m z^k t^l \cos(n,x) u_x + x^n z^k t^l \cos(n,y) u_y + x^n y^m t^l \cos(n,z) u_z + x^n y^m z^k \cos(n,t) u_t, \qquad (3.2.4)$$

$\cos(n,x) dS = dydzdt$, $\cos(n,y) dS = dxdzdt$, $\cos(n,z) dS = dxdydt$, $\cos(n,t) dS = dxdydz$, n - внешняя нормаль к ∂D_R^δ

Учитывая, что для функции u верно (3.2.1), тогда из (3.2.3) имеем

$$\iiiint\limits_{D_R^\delta} \left[y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right] dxdydzdt = \iiint\limits_{\sigma'_R} u A_\sigma[u] dS. \qquad (3.2.5)$$

В (3.2.5) перейдем к пределу при $R\to\infty$, тогда в силу условия (3.1.5) $\lim\limits_{R\to\infty}\iiint\limits_{\sigma'_R} uA_\sigma[u]dS=0$. Из (3.2.5) следует

$$\iiiint\limits_{D_R^\delta}\left[y^m z^k t^l u_x^2+x^n z^k t^l u_y^2+x^n y^m t^l u_z^2+x^n y^m z^k u_t^2\right]dxdydzdt\equiv 0. \tag{3.2.6}$$

Делаем выводы, что $u_x=u_y=u_z=u_t=0$, следовательно, в области D $u(x,y,z,t)\equiv const$. Беря во внимание (3.1.5), заключаем, что $u(x,y,z,t)\equiv 0$ в области D. Итак, мы доказали теорему 3.2.2.

3.3 Существование решений краевых задач

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия 1) – 3), тогда существует решение задачи N^∞ (2.1.1), (3.1.1) – (3.1.5) и выражается формулой

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0,z_0,t_0)=&-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l\nu_1(y,z,t)\,g_1(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dydzdt-\\&-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n z^k t^l\nu_2(x,z,t)\,g_1(x,0,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dxdzdt-\\&-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m t^l\nu_3(x,y,t)\,g_1(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dxdydt-\\&-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m z^k\nu_4(x,y,\mathrm{z})\,g_1(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dxdydz,\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где

$$g_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)$$

фундаментальное решение (2.1.14) уравнения (2.1.1), здесь

$$\begin{aligned}k_1=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{2\delta}\times\\\times\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}.\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Доказательство. Так как функция g_1 является фундаментальным решением уравнения (2.1.1), то очевидно, что решение задачи (3.3.1) удовлетворяет уравнению (2.1.1).

Докажем, что функция (3.3.1) удовлетворяет условиям (3.1.1) – (3.1.4) задачи N^∞.

Представим (3.3.1) в следующем виде

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=I_1^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+I_2^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+I_3^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+I_4^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0), \quad (3.3.3)$$

где

$$I_1^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=-k_1\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \nu_1(y,z,t)\left.\frac{F_A^{(3)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\beta,\gamma,\delta;2\beta,2\gamma,2\delta;\eta,\zeta,\varsigma)}{\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}\right|_{x=0} dydzdt, \quad (3.3.4)$$

$$I_2^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=-k_1\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n z^k t^l \nu_2(x,z,t)\left.\frac{F_A^{(3)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\gamma,\delta;2\alpha,2\gamma,2\delta;\xi,\zeta,\varsigma)}{\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}\right|_{y=0} dxdzdt, \quad (3.3.5)$$

$$I_3^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=-k_1\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m t^l \nu_3(x,y,t)\left.\frac{F_A^{(3)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\delta;2\alpha,2\beta,2\delta;\xi,\eta,\varsigma)}{\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}\right|_{z=0} dxdydt, \quad (3.3.6)$$

$$I_4^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=-k_1\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m z^k \nu_4(x,y,\mathrm{z})\left.\frac{F_A^{(3)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma;2\alpha,2\beta,2\gamma;\xi,\eta,\zeta)}{\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}\right|_{t=0} dxdydz. \quad (3.3.7)$$

Проверим условие (3.1.1). Для этого вычислим производные по x_0 от функции (3.3.4):

$$\frac{\partial}{\partial x_0}u(x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_0}I_1^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+\frac{\partial}{\partial x_0}I_2^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+\frac{\partial}{\partial x_0}I_3^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)+\frac{\partial}{\partial x_0}I_4^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0).$$

Применяя формулу дифференцирования (1.1.57), а затем формулу смежных соотношений (2.1), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} I_1^{(1)}\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{4k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)}{n+2} x_0^{n+1} \times$$
$$\times \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \nu_1\left(y,z,t\right) \frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\beta,\gamma,\delta;2\beta,2\gamma,2\delta;\eta,\zeta,\varsigma\right)}{\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+2}}\Bigg|_{x=0} dydzdt. \tag{3.3.8}$$

Разложим функцию $F_A^{(3)}$ по формуле (1.1.32), проведем некоторые преобразования и применяя формулу Больца (1.1.15), получим следующее

$$F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\beta,\gamma,\delta;2\beta,2\gamma,2\delta;\eta,\zeta,\varsigma\right) =$$
$$= \left(r^2\right)^{\beta+\gamma+\delta}\left(r_2^2\right)^{-\beta}\left(r_3^2\right)^{-\gamma}\left(r_4^2\right)^{-\delta} P_1^{(1)}\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right), \tag{3.3.9}$$

где

$$P_1^{(1)}\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\right)_{i+j+k}\left(\beta\right)_{i+j}\left(\gamma\right)_{i+k}\left(\delta\right)_{j+k}}{\left(2\beta\right)_{i+j}\left(2\gamma\right)_{i+k}\left(2\delta\right)_{j+k} i!j!k!} \times$$
$$\times\left(\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)^{i+j}\left(\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)^{i+k}\left(\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right)^{j+k} \times$$
$$\times F\left(\beta-\alpha-\gamma-\delta-2,\beta+i+j;2\beta+i+j;\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)\times \tag{3.3.10}$$
$$\times F\left(\gamma-\alpha-\beta-\delta-2-j,\gamma+i+k;2\gamma+i+k;\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)\times$$
$$\times F\left(\delta-\alpha-\beta-\gamma-2-i,\delta+j+k;2\delta+j+k;\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right).$$

Таким образом, подставляя (3.3.9) в (3.3.8), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_0} I_1^{(1)}\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{4k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)}{n+2} x_0^{n+1} \times$$
$$\times \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \nu_1\left(y,z,t\right) \frac{P_1^{(1)}\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)}{\left(r^2\right)^{\alpha+2}\left(r_2^2\right)^{\beta}\left(r_3^2\right)^{\gamma}\left(r_4^2\right)^{\delta}}\Bigg|_{x=0} dydzdt. \tag{3.3.11}$$

В (3.3.11) сделаем замену переменных

$$\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1, \qquad \frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}} = \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2,$$
$$\frac{2}{l+2} t^{\frac{l+2}{2}} = \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3. \tag{3.3.12}$$

Тогда получаем следующее

$$\frac{\partial}{\partial x_0} I_1^{(1)}\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{4k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)}{n+2}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha-1} \times$$

$$\times \int_{-a}^{\infty}\int_{-b}^{\infty}\int_{-c}^{\infty} \left\{\left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right\}^m \left\{\left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{\frac{2}{k+2}}\right\}^k \times$$

$$\times \left\{\left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{\frac{2}{l+2}}\right\}^l \nu_1\left\{\left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{\frac{2}{m+2}},\right.$$

$$\left.\left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{\frac{2}{k+2}}, \left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{\frac{2}{l+2}}\right\} \times$$

$$\times \left.\frac{P_1^{(1)}\left(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0\right)}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{\alpha+2}\left(r_2^2\right)^{\beta}\left(r_3^2\right)^{\gamma}\left(r_4^2\right)^{\delta}}\right|_{x=0} \left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{-\frac{m}{m+2}} \times$$

$$\times \left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{-\frac{k}{k+2}} \left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{-\frac{l}{l+2}} ds_1 ds_2 ds_3, \qquad (3.3.13)$$

где

$$\mathrm{a} = \frac{\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}, \qquad \mathrm{b} = \frac{\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}, \qquad \mathrm{c} = \frac{\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}}}{\frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}}}.$$

При $x_0 \to 0$ из (3.3.10) имеем

$$\lim_{x_0\to 0} P_1^{(1)}\left(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\right)_{i+j+k}\left(\beta\right)_{i+j}\left(\gamma\right)_{i+k}\left(\delta\right)_{j+k}}{\left(2\beta\right)_{i+j}\left(2\gamma\right)_{i+k}\left(2\delta\right)_{j+k} i!j!k!} \times$$
$$\times F\left(\beta-\alpha-\gamma-\delta-2, \beta+i+j; 2\beta+i+j; 1\right) \times \qquad (3.3.14)$$
$$\times F\left(\gamma-\alpha-\beta-\delta-2-j, \gamma+i+k; 2\gamma+i+k; 1\right) \times$$
$$\times F\left(\delta-\alpha-\beta-\gamma-2-i, \delta+j+k; 2\delta+j+k; 1\right).$$

Применяя формулы (1.1.13) и (1.1.28) к (3.3.14), определяем

$$\lim_{x_0\to 0} P_1^{(1)}\left(0, y, z, t; x_0, y_0, z_0, t_0\right) = \frac{\Gamma\left(2\beta\right)\Gamma\left(2\gamma\right)\Gamma\left(2\delta\right)\Gamma\left(\alpha+2\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\right)\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)}. \qquad (3.3.15)$$

В силу (3.3.15) из (3.3.13) при $x_0 \to 0$ получаем

$$\lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_1^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=2k_1\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\nu_1\left(y_0,z_0,t_0\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{\alpha+2}}. \qquad (3.3.16)$$

Для вычисления тройного интеграла из (3.3.16) применим формулу [94, с. 637].
Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{\alpha+2}}=8\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{\alpha+2}}=\frac{\pi\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+2)}. \qquad (3.3.17)$$

Применяя в (3.3.17) формулу (1.1.5), в итоге имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{\alpha+2}}=\frac{2\pi^2\Gamma(2\alpha)}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha)}. \qquad (3.3.18)$$

Подставляя (3.3.18) в (3.3.16), окончательно получаем

$$\lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_1^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=4k_1\pi^2\left(\frac{4}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}\nu_1\left(y_0,z_0,t_0\right). \qquad (3.3.19)$$

С учетом (3.3.2) из (3.3.19) получаем

$$\lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_1^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\nu_1\left(y_0,z_0,t_0\right).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_2^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=0,\ \lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_3^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=0,\ \lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}I_4^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=0.$$

Следовательно, $\lim_{x_0\to 0}\frac{\partial}{\partial x_0}u\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\nu_1\left(y_0,z_0,t_0\right)$, значит функция (3.3.1) удовлетворяет условию (3.1.1) задачи N^{∞}. Аналогично можно убедиться в том, что функция (3.3.1) удовлетворяет и условиям (3.1.2) – (3.1.4) задачи N^{∞}.

Покажем, что если заданные функции при достаточно больших значениях аргумента удовлетворяют неравенствам (3.1.7) – (3.1.10), то решение (3.3.1) задачи N^{∞} также удовлетворяет условию (3.1.5). Действительно, пусть справедливы неравенства (3.1.7) – (3.1.10), в выражениях (3.3.4) – (3.3.7) сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}&\xi_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}},\ \eta_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}},\ \zeta_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{k+2}z^{\frac{k+2}{2}},\ \varsigma_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{l+2}t^{\frac{l+2}{2}},\\&\sigma_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}},\ \sigma_2=\frac{1}{R_0}\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}},\ \sigma_3=\frac{1}{R_0}\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}},\ \sigma_4=\frac{1}{R_0}\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}},\end{aligned}\tag{3.3.20}$$

где $R_0^{\,2}=\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{\,n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{\,m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{\,k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{\,l+2}.$

Тогда при $R_0\to\infty$ из (3.3.4) – (3.3.7) получим следующие неравенства

$$\begin{aligned}&\left|I_1^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{k_1c_1}{R_0^{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times\\&\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\eta_1^{2\beta}\zeta_1^{2\gamma}\varsigma_1^{2\delta}d\eta_1d\zeta_1d\varsigma_1}{\left(\eta_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\frac{1-2\alpha+\varepsilon_1}{2}}\left(1+\eta_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},\end{aligned}\tag{3.3.21}$$

$$\begin{aligned}&\left|I_2^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{k_1c_2}{R_0^{\varepsilon_2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times\\&\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\xi_1^{2\alpha}\zeta_1^{2\gamma}\varsigma_1^{2\delta}d\xi_1d\zeta_1d\varsigma_1}{\left(\xi_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\frac{1-2\beta+\varepsilon_2}{2}}\left(1+\xi_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},\end{aligned}\tag{3.3.22}$$

$$\begin{aligned}&\left|I_3^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{k_1c_3}{R_0^{\varepsilon_3}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times\\&\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\xi_1^{2\alpha}\eta_1^{2\beta}\varsigma_1^{2\delta}d\xi_1d\eta_1d\varsigma_1}{\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\frac{1-2\gamma+\varepsilon_3}{2}}\left(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},\end{aligned}\tag{3.3.23}$$

$$\begin{aligned}&\left|I_4^{(1)}(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{k_1c_4}{R_0^{\varepsilon_4}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\times\\&\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\xi_1^{2\alpha}\eta_1^{2\beta}\zeta_1^{2\gamma}d\xi_1d\eta_1d\zeta_1}{\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}\left(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}.\end{aligned}\tag{3.3.24}$$

Покажем, что тройные интегралы, входящие в неравенства (3.3.21) – (3.3.24), ограничены.

Справедливо тождество

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2a}y^{2b}z^{2c}dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1-2d+\varepsilon}{2}}\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{a+b+c+d+1}}=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+b+c+d+1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(a+b+c+d+1\right)}, \tag{3.3.25}$$

где $0<\varepsilon<2a+2b+2c+2d+2.$

Действительно, в интеграле (3.3.25) перейдя в сферические координаты, имеем

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2a}y^{2b}z^{2c}dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1-2d+\varepsilon}{2}}\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{a+b+c+d+1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\right)^{2a+2b+1}\left(\cos\theta\right)^{2c}d\theta\times$$
$$\times\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\right)^{2a}\left(\sin\varphi\right)^{2b}d\varphi\int_0^\infty\left(r\right)^{2a+2b+2c+2d+1-\varepsilon}\left(1+r^2\right)^{-(a+b+c+d+1)}dr. \tag{3.3.26}$$

Применяя значения интегралов [63, с. 25] в правой части равенства (3.3.26), получаем тождество (3.3.25)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\theta\right)^{2a+2b+1}\left(\cos\theta\right)^{2c}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\right)^{2a}\left(\sin\varphi\right)^{2b}d\varphi\int_0^\infty\frac{\left(r\right)^{2a+2b+2c+2d+1-\varepsilon}}{\left(1+r^2\right)^{a+b+c+d+1}}dr=$$
$$=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+b+c+d+1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(a+b+c+d+1\right)}, \tag{3.3.27}$$
$$0<\varepsilon<2a+2b+2c+2d+2.$$

Таким образом, из неравенств (3.3.21) – (3.3.24) в силу значения интеграла (3.3.25) следуют неравенства

$$\left|I_1^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{\overline{c_1}}{R_0^{\varepsilon_1}},\qquad\left|I_2^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{\overline{c_2}}{R_0^{\varepsilon_2}},$$
$$\left|I_3^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{\overline{c_3}}{R_0^{\varepsilon_3}},\qquad\left|I_4^{(1)}\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{\overline{c_4}}{R_0^{\varepsilon_4}}, \tag{3.3.28}$$

где $\overline{c_1},\overline{c_2},\overline{c_3},\overline{c_4}$ - постоянные.

Оценки (3.3.28) показывают, что решение (3.3.1) при $R_0\to\infty$ обращается в нуль. Таким образом, выполняется условие (3.1.5) задачи N^∞. Следовательно, решение (3.3.1) удовлетворяет всем условиям задачи N^{∞}. Теорема 3.3.1 доказана.

Теорема 3.3.2. Пусть выполнены неравенства (3.1.10), (3.1.15) – (3.1.17), тогда существует решение задачи ND_1^{∞} (2.1.1), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.11) – (3.1.13) и имеет вид

$$\begin{aligned} u(x_0,y_0,z_0,t_0) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y^m z^k t^l \tau_1(y,z,t) \frac{\partial}{\partial x} g_{12}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{x=0} dydzdt + \\ &+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^n z^k t^l \tau_2(x,z,t) \frac{\partial}{\partial y} g_{12}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{y=0} dxdzdt + \\ &+ \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^n y^m t^l \tau_3(x,y,t) \frac{\partial}{\partial z} g_{12}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{z=0} dxdydt - \\ &- \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^n y^m z^k \nu_4(x,y,\mathrm{z}) g_{12}(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0) dxdydz, \end{aligned} \tag{3.3.29}$$

где

$$\begin{aligned} g_{12}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0) &= k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4} xyzx_0y_0z_0 \times \\ &\times F_A^{(4)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right) \end{aligned}$$

это фундаментальное решение (2.1.25) уравнения (2.1.1). Здесь

$$\begin{aligned} k_{12} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{2\delta} \times \\ \times \frac{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2\delta)}, \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Так как функция q_{12} является фундаментальным решением уравнения (2.1.1), то очевидно, что решение задачи (3.3.29) удовлетворяет уравнению (2.1.1).

Докажем, что функция (3.3.29) удовлетворяет условиям (3.1.4), (3.1.11) – (3.1.13) задачи ND_1^{∞}.

Представим (3.3.29) в виде следующей суммы

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0) = I_1(x_0,y_0,z_0,t_0) + I_2(x_0,y_0,z_0,t_0) + I_3(x_0,y_0,z_0,t_0) + I_4(x_0,y_0,z_0,t_0), \tag{3.3.31}$$

где

$$I_1(x_0,y_0,z_0,t_0)=k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}x_0y_0z_0\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^{m+1}z^{k+1}t^l\tau_1(y,z,t)\times$$
$$\times\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4}F_A^{(3)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\beta,1-\gamma,\delta;2-2\beta,2-2\gamma,2\delta;\eta,\zeta,\varsigma\right)\Big|_{x=0}dydzdt, \quad (3.3.32)$$

$$I_2(x_0,y_0,z_0,t_0)=k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}x_0y_0z_0\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n+1}z^{k+1}t^l\tau_2(x,z,t)\times$$
$$\times\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4}F_A^{(3)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,1-\gamma,\delta;2-2\alpha,2-2\gamma,2\delta;\xi,\zeta,\varsigma\right)\Big|_{y=0}dxdzdt, \quad (3.3.33)$$

$$I_3(x_0,y_0,z_0,t_0)=k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}x_0y_0z_0\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n+1}y^{m+1}t^l\tau_3(x,y,t)\times$$
$$\times\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4}F_A^{(3)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2\delta;\xi,\eta,\varsigma\right)\Big|_{z=0}dxdydt, \quad (3.3.34)$$

$$I_4(x_0,y_0,z_0,t_0)=-k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}\times$$
$$\times x_0y_0z_0\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^{n+1}y^{m+1}z^{k+1}\nu_4(x,y,\mathrm{z})\left(r^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma-\delta-4}\times \quad (3.3.35)$$
$$\times F_A^{(3)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,1-\gamma;2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma;\xi,\eta,\zeta\right)\Big|_{t=0}dxdydz.$$

Проверим условие (3.1.11). Рассмотрим функцию (3.3.32), разложим в функцию $F_A^{(3)}$ по формуле (1.1.32), затем проведя в (3.3.32) некоторые преобразования и применяя формулу автотрансформации Больца (1.1.15), получим следующее

$$F_A^{(3)}\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta;1-\beta,1-\gamma,\delta;2-2\beta,2-2\gamma,2\delta;\eta,\zeta,\varsigma\right)=$$
$$=\left(r^2\right)^{2-\beta-\gamma+\delta}\left(r_2^2\right)^{\beta-1}\left(r_3^2\right)^{\gamma-1}\left(r_4^2\right)^{-\delta}P_1(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0), \quad (3.3.36)$$

где

$$P_1(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=$$
$$=\sum_{l_1,l_2,l_3=0}^{\infty}\frac{(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)_{l_1+l_2+l_3}(1-\beta)_{l_1+l_2}(1-\gamma)_{l_1+l_3}(\delta)_{l_2+l_3}}{(2-2\beta)_{l_1+l_2}(2-2\gamma)_{l_1+l_3}(2\delta)_{l_2+l_3}l_1!l_2!l_3!}\left(\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)^{l_1+l_2}\times$$
$$\times\left(\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)^{l_1+l_3}\left(\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right)^{l_2+l_3}F\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta-2,1-\beta+l_1+l_2;2-2\beta+l_1+l_2;\frac{r_2^2-r^2}{r_2^2}\right)\times \quad (3.3.37)$$
$$\times F\left(\alpha+\beta-\gamma-\delta-2-l_2,1-\gamma+l_1+l_3;2-2\gamma+l_1+l_3;\frac{r_3^2-r^2}{r_3^2}\right)\times$$
$$\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta-4-l_1,\delta+l_2+l_3;2\delta+l_2+l_3;\frac{r_4^2-r^2}{r_4^2}\right).$$

Таким образом, подставляя (3.3.36) в (3.3.35), имеем

$$
\begin{aligned}
I_1\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}} x_0 y_0 z_0 \times \\
\times \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^{m+1} z^{k+1} t^l \tau_1\left(y,z,t\right) \left.\frac{P_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)}{\left(r^2\right)^{2-\alpha}\left(r_2^2\right)^{1-\beta}\left(r_3^2\right)^{1-\gamma}\left(r_4^2\right)^{\delta}}\right|_{x=0} dydzdt.
\end{aligned}
\tag{3.3.38}
$$

В (3.3.38) сделаем замену переменных

$$
\begin{gathered}
\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1, \qquad \frac{2}{k+2} z^{\frac{k+2}{2}} = \frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2, \\
\frac{2}{l+2} t^{\frac{l+2}{2}} = \frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3.
\end{gathered}
\tag{3.3.39}
$$

Тогда получаем следующее

$$
\begin{aligned}
& I_1\left(x_0, y_0, z_0, t_0\right) = k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{4}{m+2}}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{\frac{4}{k+2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-\frac{2}{n+2}} y_0 z_0 \times \\
& \times \int_{-a}^{\infty}\int_{-b}^{\infty}\int_{-c}^{\infty} \left\{\left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{\frac{2}{m+2}}\right\}^{m+1} \left\{\left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{\frac{2}{k+2}}\right\}^{k+1} \times \\
& \times \left\{\left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{\frac{2}{l+2}}\right\}^{l} \left.\frac{P_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{2-\alpha}\left(r_2^2\right)^{1-\beta}\left(r_3^2\right)^{1-\gamma}\left(r_4^2\right)^{\delta}}\right|_{x=0} \times \\
& \times \tau_1\left(\left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{\frac{2}{m+2}}, \left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{\frac{2}{k+2}},\right. \\
& \left.\left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{\frac{2}{l+2}}\right)\left[\frac{m+2}{2}\left(\frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_1\right)\right]^{-\frac{m}{m+2}} \times \\
& \times \left[\frac{k+2}{2}\left(\frac{2}{k+2} z_0^{\frac{k+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_2\right)\right]^{-\frac{k}{k+2}} \left[\frac{l+2}{2}\left(\frac{2}{l+2} t_0^{\frac{l+2}{2}} + \frac{2}{n+2} x_0^{\frac{n+2}{2}} s_3\right)\right]^{-\frac{l}{l+2}} ds_1 ds_2 ds_3,
\end{aligned}
\tag{3.3.40}
$$

где

$$\mathrm{a}=\frac{\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}},\qquad \mathrm{b}=\frac{\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}}{\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}},\qquad \mathrm{c}=\frac{\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}}{\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}}.$$

При $x_0\to 0$ из (3.3.37) получаем

$$\begin{gathered}\lim_{x_0\to 0}P_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\\=\sum_{l_1,l_2,l_3=0}^{\infty}\frac{\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta\right)_{l_1+l_2+l_3}\left(1-\beta\right)_{l_1+l_2}\left(1-\gamma\right)_{l_1+l_3}\left(\delta\right)_{l_2+l_3}}{\left(2-2\beta\right)_{l_1+l_2}\left(2-2\gamma\right)_{l_1+l_3}\left(2\delta\right)_{l_2+l_3}l_1!l_2!l_3!}\times\\\times F\left(\alpha-\beta+\gamma-\delta-2,1-\beta+l_1+l_2;2-2\beta+l_1+l_2;1\right)\times\\\times F\left(\alpha+\beta-\gamma-\delta-2-l_2,1-\gamma+l_1+l_3;2-2\gamma+l_1+l_3;1\right)\times\\\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta-4-l_1,\delta+l_2+l_3;2\delta+l_2+l_3;1\right).\end{gathered}\tag{3.3.41}$$

Применяя формулы (1.1.13) и (1.1.28) к (3.3.41), тогда

$$\lim_{x_0\to 0}P_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(2-2\gamma\right)\Gamma\left(2\delta\right)\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\Gamma\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)\Gamma\left(1-\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)}.\tag{3.3.42}$$

В силу (3.3.42) при $x_0\to 0$ из (3.3.40) получаем

$$\begin{gathered}\lim_{x_0\to 0}I_1\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_{12}\left(\frac{8}{n+2}\right)^{\frac{2}{n+2}}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{-2\delta}\times\\\times\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(2-2\gamma\right)\Gamma\left(2\delta\right)\Gamma\left(2-\alpha\right)}{\Gamma\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)\Gamma\left(1-\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)}\tau_1\left(y_0,z_0,t_0\right)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{2-\alpha}}.\end{gathered}\tag{3.3.43}$$

Чтобы вычислить интеграл в (3.3.43) используем формулу из [94, с. 637], получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{2-\alpha}}=8\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{2-\alpha}}=\frac{\pi\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}{\Gamma\left(2-\alpha\right)}.\tag{3.3.44}$$

Применяя в (3.3.44) формулу (1.1.5), в результате получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1ds_2ds_3}{\left(1+s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)^{2-\alpha}}=\frac{\pi^2\Gamma\left(2-2\alpha\right)}{2^{-2\alpha}\Gamma\left(2-\alpha\right)\left(1-2\alpha\right)\Gamma\left(1-\alpha\right)}.\tag{3.3.45}$$

Подставляя (3.3.45) в (3.3.43), окончательно имеем

$$\lim_{x_0\to 0} I_1(x_0,y_0,z_0,t_0)=4\pi^2 k_{12}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2\delta)}{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\delta)}\tau_1(y_0,z_0,t_0). \tag{3.3.46}$$

С учетом (3.3.30) из (3.3.46) получаем $\lim_{x_0\to 0} I_1(x_0,y_0,z_0,t_0)=\tau_1(y_0,z_0,t_0)$.

Нетрудно показать, что

$$\lim_{x_0\to 0} I_2(x_0,y_0,z_0,t_0)=0,\quad \lim_{x_0\to 0} I_3(x_0,y_0,z_0,t_0)=0,\quad \lim_{x_0\to 0} I_4(x_0,y_0,z_0,t_0)=0.$$

Следовательно, $\lim_{x_0\to 0} u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\tau_1(y_0,z_0,t_0)$, значит функция (3.3.29) удовлетворяет условию (3.1.11) задачи ND_1^∞. Аналогично можно убедиться в том, что функция (3.3.29) удовлетворяет и условиям (3.1.4), (3.1.12), (3.1.13) задачи ND_1^∞.

Покажем, что если заданные функции при достаточно больших значениях аргумента удовлетворяют неравенствам (3.1.10), (3.1.15) – (3.1.17), то решение (3.3.29) задачи ND_1^∞ также удовлетворяет условию (3.1.5). Действительно, пусть справедливы неравенства (3.1.10), (3.1.15) – (3.1.17), тогда в выражениях (3.3.32) – (3.3.35) сделаем следующую замену переменных

$$\xi_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}},\ \eta_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}},\ \zeta_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{k+2}z^{\frac{k+2}{2}},\ \varsigma_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{l+2}t^{\frac{l+2}{2}},$$
$$\sigma_1=\frac{1}{R_0}\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}},\ \sigma_2=\frac{1}{R_0}\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}},\ \sigma_3=\frac{1}{R_0}\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}},\ \sigma_4=\frac{1}{R_0}\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}, \tag{3.3.47}$$

где $R_0^2=\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{l+2}.$

При $R_0\to\infty$ из (3.3.32) – (3.3.35) получим следующие неравенства

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_1(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{k_{12}c_5}{R_0^{2\varepsilon_5}}4^{\frac{2}{n+2}+\frac{2}{m+2}+\frac{2}{k+2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{1-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\sigma_1^{\frac{2}{n+2}}\sigma_2^{\frac{2}{m+2}}\sigma_3^{\frac{2}{k+2}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\eta_1\zeta_1\varsigma_1^{2\delta}d\eta_1 d\zeta_1 d\varsigma_1}{\left(1+\eta_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}\left(\eta_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\varepsilon_5}}, \tag{3.3.48}$$

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_2\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{k_{12}c_6}{R_0^{2\varepsilon_6}}4^{\frac{2}{n+2}+\frac{2}{m+2}+\frac{2}{k+2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\sigma_1^{\frac{2}{n+2}}\sigma_2^{\frac{2}{m+2}}\sigma_3^{\frac{2}{k+2}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\xi_1\zeta_1\varsigma_1^{2\delta}d\xi_1 d\zeta_1 d\varsigma_1}{\left(1+\xi_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}\left(\xi_1^2+\zeta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\varepsilon_6}},\tag{3.3.49}$$

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_3\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{k_{12}c_7}{R_0^{2\varepsilon_7}}4^{\frac{2}{n+2}+\frac{2}{m+2}+\frac{2}{k+2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{1-2\gamma}\left(\frac{2}{l+2}\right)^{-2\delta}\times$$
$$\times\sigma_1^{\frac{2}{n+2}}\sigma_2^{\frac{2}{m+2}}\sigma_3^{\frac{2}{k+2}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\xi_1\eta_1\varsigma_1^{2\delta}d\xi_1 d\eta_1 d\varsigma_1}{\left(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\varsigma_1^2\right)^{\varepsilon_7}},\tag{3.3.50}$$

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_4\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right|\le\frac{k_{12}c_4}{R_0^{\varepsilon_4}}4^{\frac{2}{n+2}+\frac{2}{m+2}+\frac{2}{k+2}}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{2}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{2}{k+2}\right)^{-2\gamma}\times$$
$$\times\sigma_1^{\frac{2}{n+2}}\sigma_2^{\frac{2}{m+2}}\sigma_3^{\frac{2}{k+2}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\xi_1\eta_1\zeta_1 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{\left(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}}.\tag{3.3.51}$$

Покажем, что тройные интегралы, входящие в неравенства (3.3.48) – (3.3.50), ограничены. Для неравенств (3.3.48) – (3.3.50) справедливо тождество

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{xyz^{2d}dxdydz}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{-(a+b+c-d-4)}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\varepsilon}}=$$
$$=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+d\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+d\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+d-\varepsilon\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-a-b-c+\varepsilon\right)}{\Gamma\left(4-a-b-c+d\right)},\tag{3.3.52}$$
$$a+b+c-\frac{3}{2}<\varepsilon<\frac{5}{2}+d.$$

Действительно, в интеграле (3.3.52) перейдя в сферические координаты, имеем

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{xyz^{2d}dxdydz}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^{-(a+b+c-d-4)}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\varepsilon}}=$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^{2d}\theta d\theta\int_0^\infty\left(1+r^2\right)^{-(4-a-b-c+d)}r^{4+2d-2\varepsilon}dr.\tag{3.3.53}$$

Применяя формулы [63, с. 25)] в правой части равенства (3.3.53), получаем тождество (3.3.52)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^{2d}\theta d\theta\int_0^{\infty}\left(1+r^2\right)^{-(4-a-b-c+d)}r^{4+2d-2\varepsilon}dr=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+d\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+d\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+d-\varepsilon\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-a-b-c+\varepsilon\right)}{\Gamma(4-a-b-c+d)},\tag{3.3.54}$$

$$a+b+c-\frac{3}{2}<\varepsilon<\frac{5}{2}+d.$$

Таким образом, из неравенств (3.3.48) – (3.3.50) в силу значения интеграла (3.3.52) следуют неравенства

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_1(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{\overline{c_5}}{R_0^{2\varepsilon_5}},\ \lim_{R_0\to\infty}\left|I_2(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{\overline{c_6}}{R_0^{2\varepsilon_6}},\ \lim_{R_0\to\infty}\left|I_3(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{\overline{c_7}}{R_0^{2\varepsilon_7}},\tag{3.3.55}$$

где $\overline{c_5},\overline{c_6},\overline{c_7}$ - постоянные.

Покажем, что интеграл, входящий в (3.3.51) ограничен. Для этого перейдем к сферическим координатам

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\xi_1\eta_1\zeta_1 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1}{\left(1+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2\right)^{\frac{1-2\delta+\varepsilon_4}{2}}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\infty}\frac{r^{(2\delta-1-\varepsilon_4)}}{\left(1+r^2\right)^{4-\alpha-\beta-\gamma+\delta}}dr.\tag{3.3.56}$$

Применяя формулы [63, с. 25] к правой части (3.3.56), определяем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\infty}\left(1+r^2\right)^{-(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)}r^{(2\delta-1-\varepsilon_4)}dr=$$

$$=\frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\delta-\frac{\varepsilon_4}{2}\right)\Gamma\left(4-\alpha-\beta-\gamma+\frac{\varepsilon_4}{2}\right)}{\Gamma(4-\alpha-\beta-\gamma+\delta)},\qquad 2\alpha+2\beta+2\gamma-8<\varepsilon_4<2\delta.\tag{3.3.57}$$

Таким образом, мы показали, что интеграл в неравенстве (3.3.51) ограничен, значит справедливо неравенство

$$\lim_{R_0\to\infty}\left|I_4(x_0,y_0,z_0,t_0)\right|\le\frac{\overline{c_4}}{R_0^{\varepsilon_4}},\tag{3.3.58}$$

где $\overline{c_4}$ - постоянная.

Неравенства (3.3.55) и (3.3.58) показывают, что решение (3.3.29) при $R_0 \to \infty$ обращается в нуль. Таким образом, выполняется условие (3.1.5) задачи ND_1^∞. Следовательно, решение (3.3.29) удовлетворяет всем условиям задачи ND_1^∞. Теорема 3.3.2 доказана.

Теорема 3.3.3. Пусть выполнены неравенства (3.1.9), (3.1.10), (3.1.15), (3.1.16), тогда существует решение задачи ND_2^∞ (2.1.1), (3.1.3) – (3.1.5), (3.1.11), (3.1.12) и имеет вид

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \tau_1(y,z,t) \frac{\partial}{\partial x} g_6(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{x=0} dydzdt +$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n z^k t^l \tau_2(x,z,t) \frac{\partial}{\partial y} g_6(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{y=0} dxdzdt -$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m t^l \nu_3(x,y,t)\, g_6(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dxdydt -$$
$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m z^k \nu_4(x,y,\mathrm{z})\, g_6(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0)\,dxdydz,$$

где

$$g_6(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0) =$$
$$= k_6 \xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta} \frac{F_A^{(4)}(3-\alpha-\beta+\gamma+\delta;1-\alpha,1-\beta,\gamma,\delta;2-2\alpha\ ,2-2\beta\ ,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma)}{(r^2)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}$$

это фундаментальное решение (2.1.19) уравнения (2.1.1),

$$k_6 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{2\delta} \frac{\Gamma(3-\alpha-\beta+\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}.$$

Теорема 3.3.4. Пусть выполнены неравенства (3.1.8) – (3.1.10), (3.1.15), тогда существует решение задачи ND_3^∞ (2.1.1), (3.1.2) – (3.1.5), (3.1.11) и имеет вид

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \tau_1(y,z,t)\frac{\partial}{\partial x}g_2(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{x=0}dydzdt-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n z^k t^l \nu_2(x,z,t)\,g_2(x,0,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)dxdzdt-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m t^l \nu_3(x,y,t)\,g_2(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0)dxdydt-$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m z^k \nu_4(x,y,\mathrm{z})\,g_2(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0)dxdydz,$$

где

$$g_2(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$$
$$=k_2\xi^{1-2\alpha}\frac{F_A^{(4)}(2-\alpha+\beta+\gamma+\delta;1-\alpha,\beta,\gamma,\delta;2-2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma)}{(r^2)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},$$

фундаментальное решение (2.1.15) уравнения (2.1.1),

$$k_2=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{2\delta}\frac{\Gamma(2-\alpha+\beta+\gamma+\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2\beta)\Gamma(2\gamma)\Gamma(2\delta)}.$$

Теорема 3.3.5. Пусть выполнены неравенства (3.1.15) – (3.1.18), тогда существует решение задачи D^∞ (2.1.1), (3.1.5), (3.1.11) – (3.1.14) и имеет вид

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty y^m z^k t^l \tau_1(y,z,t)\frac{\partial}{\partial x}g_{16}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{x=0}dydzdt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n z^k t^l \tau_2(x,z,t)\frac{\partial}{\partial y}g_{16}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{y=0}dxdzdt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m t^l \tau_3(x,y,t)\frac{\partial}{\partial z}g_{16}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{z=0}dxdydt+$$

$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty x^n y^m z^k \tau_4(x,y,\mathrm{z})\frac{\partial}{\partial t}g_{16}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{t=0}dxdydz,$$

где

$$g_{16}(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_{16}\xi^{1-2\alpha}\eta^{1-2\beta}\zeta^{1-2\gamma}\varsigma^{1-2\delta}\times$$
$$\times\frac{F_A^{(4)}(5-\alpha-\beta-\gamma-\delta;1-\alpha,1-\beta,1-\gamma,1-\delta;2-2\alpha,2-2\beta,2-2\gamma,2-2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma)}{(r^2)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}$$

это фундаментальное решение (2.1.29) уравнения (2.1.1). Здесь

$$k_{16} = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^{2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{2\delta} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(5-\alpha-\beta-\gamma-\delta)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(2-2\alpha)\Gamma(2-2\beta)\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(2-2\delta)}.$$

Доказательства теорем 3.3.3, 3.3.4 и 3.3.5 проводятся по тому же алгоритму, по которому доказаны теоремы 3.3.1 и 3.3.2.

В результате исследования вопросов разрешимости краевых задач для уравнения (H) были опубликованы работы [95-103].

4 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ (H) В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В этом разделе будет исследована разрешимость краевой задачи N для обобщенного уравнения Геллерстедта (H) в ограниченной области. Для решения задачи будет использоваться фундаментальное решение g_1. Единственность решения задачи будет доказываться с помощью метода интегралов энергии. Далее будет построена функция Грина G_1, рассматриваемой задачи N, состоящая из фундаментального решения g_1 и регулярного решения g_1^*. Решение будет получено в явном виде, в доказательстве существования решения будут использоваться свойства гипергеометрических функций, формулы Больца, дифференцирования, разложения и т.д.

4.1 Постановка краевой задачи N

Введем некоторые обозначения. Пусть D это конечная односвязная область в $\mathbb{R}_4^+$, ограниченная гиперплоскостями:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(0, y, z, t) : x = 0,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c,\ 0 < t < d\},\\
S_2 &= \{(x, 0, z, t) : 0 < x < a,\ y = 0,\ 0 < z < c,\ 0 < t < d\},\\
S_3 &= \{(x, y, 0, t) : 0 < x < a,\ 0 < y < b, z = 0,\ 0 < t < d\},\\
S_4 &= \{(x, y, z, 0) : 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c,\ t = 0\}
\end{aligned}$$

и гладкой поверхностью S_5. Пересечения поверхности S_5 с гиперплоскостями S_i $\left(i = \overline{1, 4}\right)$ обозначим через $\Gamma_1 = S_5 \cap S_1$, $\Gamma_2 = S_5 \cap S_2$, $\Gamma_3 = S_5 \cap S_3$, $\Gamma_4 = S_5 \cap S_4$. Здесь a, b, c, d положительные постоянные числа, $A(a,0,0,0)$, $B(0,b,0,0)$, $C(0,0,c,0)$, $D(0,0,0,d)$ и $O(0,0,0,0)$.

Задача N**.** Найти регулярное решение $u(x, y, z, t)$ уравнения (2.1.1) из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, z, t)\right|_{x=0} = \nu_1(y, z, t), \quad (y, z, t) \in S_1, \tag{4.1.1}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial y} u(x, y, z, t)\right|_{y=0} = \nu_2(x, z, t), \quad (x, z, t) \in S_2, \tag{4.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x,y,z,t)\Big|_{z=0}=\nu_3(x,y,t),\quad (x,y,t)\in S_3, \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=\nu_4(x,y,z),\quad (x,y,z)\in S_4, \tag{4.1.4}$$

$$u(x,y,z,t)=\varphi(x,y,z,t),\qquad (x,y,z,t)\in\overline{S_5}, \tag{4.1.5}$$

где $\nu_1(y,z,t)$, $\nu_2(x,z,t)$, $\nu_3(x,y,t)$, $\nu_4(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z,t)$ – заданные непрерывные функции, причем функции $\nu_i\left(i=\overline{1,4}\right)$ могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка на границах области $\Gamma_1, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$; $\Gamma_2, \overline{OA}, \overline{OC}, \overline{OD}$; $\Gamma_3, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OD}$; $\Gamma_4, \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.

4.2 Теорема единственности

Теорема 4.2.1. Краевая задача N имеет не более одного решения.

Доказательство. Будем рассматривать однородный случай задачи N.

Рассмотрим тождество

$$uH(w)-wH(u)=\frac{\partial}{\partial x}\left[y^m z^k t^l\left(uw_x-wu_x\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[x^n z^k t^l\left(uw_y-wu_y\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[x^n y^m t^l\left(uw_z-wu_z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[x^n y^m z^k\left(uw_t-wu_t\right)\right].$$

Проинтегрируем обе части этого тождества по области D и используем формулу Гаусса-Остроградского

$$\iiiint\limits_{D_\varepsilon}\left[uH(w)-wH(u)\right]dxdydzdt=\iiint\limits_{\partial D_\varepsilon}\left[y^m z^k t^l\left(uw_x-wu_x\right)\cos(n,x)+x^n z^k t^l\times\right.$$
$$\left.\times\left(uw_y-wu_y\right)\cos(n,y)+x^n y^m t^l\left(uw_z-wu_z\right)\cos(n,z)+x^n y^m z^k\left(uw_t-wu_t\right)\cos(n,t)\right]dS. \tag{4.2.1}$$

Здесь $D_\varepsilon\in D$ где $\varepsilon>0$ это расстояние от границ области $\partial D=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$, $\cos(n,x)dS=dydzdt$, $\cos(n,y)dS=dxdzdt$, $\cos(n,z)dS=dxdydt$, $\cos(n,t)dS=dxdydz$, n - внешняя нормаль к ∂D.

Докажем справедливость равенства

$$\iiiint\limits_{D_\varepsilon}uH(u)dxdydzdt=\iiiint\limits_{D_\varepsilon}\left(y^m z^k t^l u_x^2+x^n z^k t^l u_y^2+x^n y^m t^l u_z^2+x^n y^m z^k u_t^2\right)dxdydzdt+$$
$$+\iiiint\limits_{D_\varepsilon}\left[\left(y^m z^k t^l uu_x\right)_x+\left(x^n z^k t^l uu_y\right)_y+\left(x^n y^m t^l uu_z\right)_z+\left(x^n y^m z^k uu_t\right)_t\right]dxdydzdt. \tag{4.2.2}$$

Очевидно, что справедливо следующее выражение

$$\iiiint\limits_{D_\varepsilon} uH(u)\,dxdydzdt = \iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left(y^m z^k t^l u u_{xx} + x^n z^k t^l u u_{yy} + x^n y^m t^l u u_{zz} + x^n y^m z^k u u_{tt} \right) dxdydzdt. \quad (4.2.3)$$

В правой части (4.2.3) каждое из слагаемых можно представить в виде следующих равенств

$$\begin{aligned} y^m z^k t^l u u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^m z^k t^l u u_x \right) - y^m z^k t^l u_x^2, \quad x^n z^k t^l u u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^n z^k t^l u u_y \right) - x^n z^k t^l u_y^2, \\ x^n y^m t^l u u_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^n y^m t^l u u_z \right) - x^n y^m t^l u_z^2, \quad x^n y^m z^k u u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(x^n y^m z^k u u_t \right) - x^n y^m z^k u_t^2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Подставим (4.2.4) в (4.2.3), получим

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_{D_\varepsilon} uH(u)\,dxdydzdt = \\ &= \iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(y^m z^k t^l u u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^n z^k t^l u u_y \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^n y^m t^l u u_z \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(x^n y^m z^k u u_t \right) \right) dxdydzdt - \\ &\quad - \iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt = 0, \end{aligned}$$

из чего следует

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt = \\ &= \iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y^m z^k t^l u u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^n z^k t^l u u_y \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^n y^m t^l u u_z \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(x^n y^m z^k u u_t \right) \right] dxdydzdt. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Из (4.2.5) следует

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_{D_\varepsilon} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt = \\ &= \iiiint\limits_{D_\varepsilon} u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y^m z^k t^l u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^n z^k t^l u_y \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^n y^m t^l u_z \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(x^n y^m z^k u_t \right) \right] dxdydzdt. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Применим формулу Гаусса-Остроградского к (4.2.6), при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$\begin{aligned} &\iiiint\limits_{D} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt = \\ &= \iiint\limits_{\partial D} u\left[y^m z^k t^l u_x \cos(n,x) + x^n z^k t^l u_y \cos(n,y) + x^n y^m t^l u_z \cos(n,z) + x^n y^m z^k u_t \cos(n,t) \right] dS. \end{aligned}$$

Учитывая краевые условия, имеем

$$\int\iiint\limits_{D} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt =$$
$$= \iiint\limits_{\partial D} u \left[y^m z^k t^l \nu_1 \cos(n,x) + x^n z^k t^l \nu_2 \cos(n,y) + x^n y^m t^l \nu_3 \cos(n,z) + x^n y^m z^k \nu_4 \cos(n,t) \right] dS,$$

и следовательно

$$\int\iiint\limits_{D} uH(u)\,dxdydzdt = \int\iiint\limits_{D} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt =$$
$$= \iiint\limits_{S_1} y^m z^k t^l u\nu_1 dydzdt + \iiint\limits_{S_2} x^n z^k t^l u\nu_2 dxdzdt + \iiint\limits_{S_3} x^n y^m t^l u\nu_3 dxdydt$$
$$+ \iiint\limits_{S_4} x^n y^m z^k u\nu_4 dxdydz - \iiint\limits_{S_5} x^n y^m z^k t^l \varphi A_s[u]\,dS,$$

где $A_s[u] = y^m z^k t^l \cos(x,n)\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^n z^k t^l \cos(y,n)\dfrac{\partial u}{\partial y} + x^n y^m t^l \cos(z,n)\dfrac{\partial u}{\partial z} + x^n y^m z^k \cos(t,n)\dfrac{\partial u}{\partial t}.$

С учетом однородности задачи, получаем

$$\int\iiint\limits_{D} \left(y^m z^k t^l u_x^2 + x^n z^k t^l u_y^2 + x^n y^m t^l u_z^2 + x^n y^m z^k u_t^2 \right) dxdydzdt = 0. \qquad (4.2.7)$$

Из равенства (4.2.7) следует, что $u_x = u_y = u_z = u_t = 0$, означит $u(x,y,z,t) = const$. Так как задача однородна, следовательно, $u(x,y,z,t) = 0$ в области $\overline{D}$. Таким образом, теорема 4.2.1 единственности решения задачи N доказана.

4.3 Функция Грина задачи N. Решение краевой задачи N

Рассмотрим положительную 1/16 часть четырехмерной сферы радиуса $R = a$, центр которой располагается в точке $(0,0,0,0)$. Предположим $b = c = d = a$, тогда покажем существование решения задачи N, применяя метод функции Грина.

Определение 4.3.1. Функцией Грина задачи N для уравнения $H(u) = 0$ является функция $G_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$, которая удовлетворяет условиям:

1) внутри области D, кроме точки (x_0,y_0,z_0,t_0), эта функция является регулярным решением уравнения (H);
2) удовлетворяет граничным условиям

$$G_1(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\Big|_{S_5} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{x=0} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} G_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} G_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)\Big|_{t=0}=0;$$

3) функция Грина представляется в виде

$$G_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=g_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)+g_1^*\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right), \qquad (4.3.1)$$

где

$$g_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=k_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)$$

это фундаментальное решение (2.1.14) уравнения (2.1.1), k_1 определяется по формуле (3.3.2), а функция

$$g_1^*\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=-\left(\frac{a}{R_0}\right)^{2(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)}g_1\left(x,y,z,t;\overline{x_0},\overline{y_0},\overline{z_0},\overline{t_0}\right) \qquad (4.3.2)$$

это регулярное решение уравнения (2.1.1) в области D. Здесь

$$\overline{x_0}^{\frac{n+2}{2}}=\frac{a^2}{R_0^2}x_0^{\frac{n+2}{2}},\quad \overline{y_0}^{\frac{m+2}{2}}=\frac{a^2}{R_0^2}y_0^{\frac{m+2}{2}},\quad \overline{z_0}^{\frac{k+2}{2}}=\frac{a^2}{R_0^2}z_0^{\frac{k+2}{2}},\quad \overline{t_0}^{\frac{l+2}{2}}=\frac{a^2}{R_0^2}t_0^{\frac{l+2}{2}},$$

$$a^2=\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2},$$

$$R_0^2=\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{l+2}.$$

Теорема 4.3.1. Пусть $\nu_1(y,z,t)\in C(S_1)$, $\nu_2(x,z,t)\in C(S_2)$, $\nu_3(x,y,t)\in C(S_3)$, $\nu_4(x,y,\mathrm{z})\in C(S_4)$, $\varphi(x,y,z,t)\in C^2(S_5)$, тогда решение задачи N имеет единственное решение, представленное в следующем виде:

$$\begin{aligned}u\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)=&-\iiint\limits_{S_1}y^m z^k t^l\nu_1(y,z,t)G_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dydzdt\\&-\iiint\limits_{S_2}x^n z^k t^l\nu_2(x,z,t)G_1\left(x,0,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdzdt\\&-\iiint\limits_{S_3}x^n y^m t^l\nu_3(x,y,t)G_1\left(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdydt \qquad (4.3.3)\\&-\iiint\limits_{S_4}x^n y^m z^k\nu_4(x,y,\mathrm{z})G_1\left(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdydz\\&-\iiint\limits_{S_5}x^n y^m z^k t^l\varphi(\sigma)A_S\left[G_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right]d\sigma,\end{aligned}$$

где $G_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)$ - функция Грина,

$$A_S[\ ]=y^m z^k t^l \cos(x,n)\frac{\partial}{\partial x}+x^n z^k t^l \cos(y,n)\frac{\partial}{\partial y}+x^n y^m t^l \cos(z,n)\frac{\partial}{\partial z}+x^n y^m z^k \cos(t,n)\frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.3.4)$$

Доказательство. Пусть точка $\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)\in D$. Вырежем из области D шар малого радиуса ε с центром в точке $\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right)$, оставшуюся часть области D обозначим через D_ε, а через C_ε обозначим сферу вырезанного шара.

Используя формулу (4.2.1), получим

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{C_\varepsilon}\left(uA_s\left[G_1\right]-G_1A_s\left[u\right]\right)dS=&-\iiint\limits_{S_1} y^m z^k t^l \nu_1\left(y,z,t\right)G_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dydzdt-\\&-\iiint\limits_{S_2} x^n z^k t^l \nu_2\left(x,z,t\right)G_1\left(x,0,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdzdt-\\&-\iiint\limits_{S_3} x^n y^m t^l \nu_3\left(x,y,t\right)G_1\left(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdydt-\\&-\iiint\limits_{S_4} x^n y^m z^k \nu_4\left(x,y,z\right)G_1\left(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0\right)dxdydz-\\&-\iiint\limits_{S_5} x^n y^m z^k t^l \varphi\left(\sigma\right)A_s\left[G_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right]d\sigma.\end{aligned} \quad (4.3.5)$$

В (4.3.5)

$$\begin{aligned}&F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;0,y,z,t\right)=F_A^{(3)}\left(a;b_2,b_3,b_4;c_2,c_3,c_4;y,z,t\right),\\&F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;x,0,z,t\right)=F_A^{(3)}\left(a;b_1,b_3,b_4;c_1,c_3,c_4;x,z,t\right),\\&F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,0,t\right)=F_A^{(3)}\left(a;b_1,b_2,b_4;c_1,c_2,c_4;x,y,t\right),\\&F_A^{(4)}\left(a;b_1,b_2,b_3,b_4;c_1,c_2,c_3,c_4;x,y,z,0\right)=F_A^{(3)}\left(a;b_1,b_2,b_3;c_1,c_2,c_3;x,y,z\right).\end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Подставляя (4.3.6) в (4.3.1), имеем

$$\begin{aligned}G_1\left(0,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)=&k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\beta,\gamma,\delta;2\beta,2\gamma,2\delta;\eta_{01}^{(x)},\zeta_{01}^{(x)},\varsigma_{01}^{(x)}\right)}{\left(r_x^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}\\&-k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\beta,\gamma,\delta;2\beta,2\gamma,2\delta;\eta_{02}^{(x)},\zeta_{02}^{(x)},\varsigma_{02}^{(x)}\right)}{\left(r_{sx}^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},\end{aligned}$$

$$G_1(x,0,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\gamma,\delta;2\alpha,2\gamma,2\delta;\xi_{01}^{(y)},\zeta_{01}^{(y)},\varsigma_{01}^{(y)}\right)}{\left(r_y^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}$$
$$-k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\gamma,\delta;2\alpha,2\gamma,2\delta;\xi_{02}^{(y)},\zeta_{02}^{(y)},\varsigma_{02}^{(y)}\right)}{\left(r_{sy}^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},$$

$$G_1(x,y,0,t;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\delta;2\alpha,2\beta,2\delta;\xi_{01}^{(z)},\eta_{01}^{(z)},\varsigma_{01}^{(z)}\right)}{\left(r_z^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}$$
$$-k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\delta;2\alpha,2\beta,2\delta;\xi_{02}^{(z)},\eta_{02}^{(z)},\varsigma_{02}^{(z)}\right)}{\left(r_{sz}^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}, \tag{4.3.7}$$

$$G_1(x,y,z,0;x_0,y_0,z_0,t_0)=k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma;2\alpha,2\beta,2\gamma;\xi_{01}^{(t)},\eta_{01}^{(t)},\zeta_{01}^{(t)}\right)}{\left(r_t^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}}$$
$$-k_1\frac{F_A^{(3)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma;2\alpha,2\beta,2\gamma;\xi_{02}^{(t)},\eta_{02}^{(t)},\zeta_{02}^{(t)}\right)}{\left(r_{st}^2\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1}},$$

где

$$r_x^2=r^2\big|_{x=0},\quad r_y^2=r^2\big|_{y=0},\quad r_z^2=r^2\big|_{z=0},\quad r_t^2=r^2\big|_{t=0},$$

$$\xi_{0i}^{(y)}=\xi_i\big|_{y=0},\quad \xi_{0i}^{(z)}=\xi_i\big|_{z=0},\quad \xi_{0i}^{(t)}=\xi_i\big|_{t=0},\quad \eta_{0i}^{(x)}=\eta_i\big|_{x=0},\quad \eta_{0i}^{(z)}=\eta_i\big|_{z=0},\quad \eta_{0i}^{(t)}=\eta_i\big|_{t=0},$$

$$\zeta_{0i}^{(x)}=\zeta_i\big|_{x=0},\quad \zeta_{0i}^{(y)}=\zeta_i\big|_{y=0},\quad \zeta_{0i}^{(t)}=\zeta_i\big|_{t=0},\quad \varsigma_{0i}^{(x)}=\varsigma_i\big|_{x=0},\quad \varsigma_{0i}^{(y)}=\varsigma_i\big|_{y=0},\quad \varsigma_{0i}^{(z)}=\varsigma_i\big|_{z=0},$$

$$\xi_i=\sigma_i\left(\frac{2}{n+2}\right)^2(xx_0)^{\frac{n+2}{2}},\quad \eta_i=\sigma_i\left(\frac{2}{m+2}\right)^2(yy_0)^{\frac{m+2}{2}},\quad \zeta_i=\sigma_i\left(\frac{2}{k+2}\right)^2(zz_0)^{\frac{k+2}{2}}, \tag{4.3.8}$$
$$\varsigma_i=\sigma_i\left(\frac{2}{l+2}\right)^2(tt_0)^{\frac{l+2}{2}},\quad (i=1,2),\quad \sigma_1=-\frac{4}{r^2},\quad \sigma_2=-\frac{4}{r_s^2}\frac{a^2}{R_0^2},$$

$$r_s^2=\left(a-\frac{4}{(n+2)^2}\frac{(xx_0)^{\frac{n+2}{2}}}{a}\right)^2+\left(a-\frac{4}{(m+2)^2}\frac{(yy_0)^{\frac{m+2}{2}}}{a}\right)^2+\left(a-\frac{4}{(k+2)^2}\frac{(zz_0)^{\frac{k+2}{2}}}{a}\right)^2+$$

$$+\left(a-\frac{4}{(l+2)^2}\frac{(tt_0)^{\frac{l+2}{2}}}{a}\right)^2+\frac{\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{l+2}}{a^2}\frac{4}{(n+2)^2}x^{n+2}+$$

$$+\frac{\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{n+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{k+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{l+2}}{a^2}\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}+$$

$$+\frac{\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}+\frac{4}{(l+2)^2}t_0^{l+2}}{a^2}\frac{4}{(k+2)^2}z^{k+2}+$$

$$+\frac{\frac{4}{(n+2)^2}x_0^{n+2}+\frac{4}{(m+2)^2}y_0^{m+2}+\frac{4}{(k+2)^2}z_0^{k+2}}{a^2}\frac{4}{(l+2)^2}t^{l+2}-3a^2,$$

$$r_{sx}^2=r_s^2\Big|_{x=0},\quad r_{sy}^2=r_s^2\Big|_{y=0},\quad r_{sz}^2=r_s^2\Big|_{z=0},\quad r_{st}^2=r_s^2\Big|_{t=0}.$$

Левую часть равенства (4.3.5) разделим на два интеграла

$$\iiint\limits_{C_\varepsilon}\left(uA_s[G_1]-G_1A_s[u]\right)dS=\iiint\limits_{C_\varepsilon}uA_s[G_1]dS-\iiint\limits_{C_\varepsilon}G_1A_s[u]dS, \tag{4.3.9}$$

вычислим первый из этих интегралов

$$I=\iiint\limits_{C_\varepsilon}uA_s[G_1]dS. \tag{4.3.10}$$

В силу (4.3.1) интеграл (4.3.10) преобразуется

$$I=I_1+I_2=\iiint\limits_{C_\varepsilon}uA_s\left[g_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\right]dS+\iiint\limits_{C_\varepsilon}uA_s\left[g_1^*(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)\right]dS. \tag{4.3.11}$$

Согласно (4.3.4)

$$\begin{aligned}A_s[g_1]=y^mz^kt^l\cos(x,n)\frac{\partial g_1}{\partial x}+x^nz^kt^l\cos(y,n)\frac{\partial g_1}{\partial y}+\\+x^ny^mt^l\cos(z,n)\frac{\partial g_1}{\partial z}+x^ny^mz^k\cos(t,n)\frac{\partial g_1}{\partial t}.\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Пользуясь формулой дифференцирования (1.1.57), вычислим частные производные от фундаментального решения g_1 из (4.3.12):

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = -2\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)k_1 x^{\frac{n}{2}}}{(r^2)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+2}}\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)\times$$
$$\times F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) - 2\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)k_1 x^{\frac{n}{2}}}{(r^2)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+2}}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} 2\frac{2}{n+2}\frac{\alpha}{2\alpha}x_0^{\frac{n+2}{2}}F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) + \\ \left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)\left[\begin{array}{l} \frac{\alpha}{2\alpha}\xi F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \\ +\frac{\beta}{2\beta}\eta F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta+1,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta+1,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \\ +\frac{\gamma}{2\gamma}\zeta F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma+1,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma+1,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \\ +\frac{\delta}{2\delta}\varsigma F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta+1;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta+1;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \end{array}\right] \end{array}\right\}. \tag{4.3.13}$$

В (4.3.13) используя формулу (2.1), получим следующее

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = -2k_1(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)x^{\frac{n}{2}}(r^2)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) + \\ +\left(\frac{2}{n+2}x^{\frac{n+2}{2}} - \frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}\right)F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \end{array}\right\}.$$

Остальные производные находим аналогично:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = -2k_1(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)y^{\frac{m}{2}}(r^2)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta+1,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta+1,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) + \\ +\left(\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} - \frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)F_A^{(4)}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma) \end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = -2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)z^{\frac{k}{2}}\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma+1,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma+1,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+\\+\left(\frac{2}{k+2}z^{\frac{k+2}{2}}-\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}\right)F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = -2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)t^{\frac{l}{2}}\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta+1;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta+1;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)+\\+\left(\frac{2}{l+2}t^{\frac{l+2}{2}}-\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}\right)F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\end{array}\right\}.$$

Подставим частные производные в (4.3.12), тогда получим

$$\begin{aligned}
&A_s\left[g_1\right] = -\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)k_1\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1}\times\\
&\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)A_s\left[\ln r^2\right]-\\
&-2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}x^{\frac{n}{2}}y^m z^k t^l\times\\
&\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\frac{dydzdt}{dS}-\\
&-2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}x^n y^{\frac{m}{2}}z^k t^l\times\\
&\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta+1,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta+1,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\frac{dxdzdt}{dS}-\\
&-2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}x^n y^m z^{\frac{k}{2}}t^l\times\\
&\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma+1,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma+1,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\frac{dxdydt}{dS}-\\
&-2k_1\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2}\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}x^n y^m z^k t^{\frac{l}{2}}\times\\
&\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta+1;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta+1;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)\frac{dxdydz}{dS}.
\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

Подставим (4.3.14) в (4.3.11), тогда первый интеграл будет представлен в виде суммы:

$$I_1 = \iiint\limits_{C_\varepsilon} u A_s\left[g_1\left(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0\right)\right]dS = I_{11}+I_{12}+I_{13}+I_{14}+I_{15} =$$
$$= -\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1} \times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right) A_s\left[\ln r^2\right]udS -$$
$$-2\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\frac{2}{n+2}x_0^{\frac{n+2}{2}}x^{\frac{n}{2}}k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} y^m z^k t^l \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2} \times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha+1,\beta,\gamma,\delta;2\alpha+1,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)udydzdt -$$
$$-2\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\frac{2}{m+2}y_0^{\frac{m+2}{2}}y^{\frac{m}{2}}k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} x^n z^k t^l \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2} \times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta+1,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta+1,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)udxdzdt -$$
$$-2\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\frac{2}{k+2}z_0^{\frac{k+2}{2}}z^{\frac{k}{2}}k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} x^n y^m t^l \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2} \times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma+1,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma+1,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)udxdydt -$$
$$-2\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\frac{2}{l+2}t_0^{\frac{l+2}{2}}t^{\frac{l}{2}}k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} x^n y^m z^k \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-2} \times \qquad (4.3.15)$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta+1;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta+1;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)udxdydz.$$

Чтобы вычислить интеграл (4.3.10), сначала вычислим интеграл

$$I_{11} = -\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)k_1 \iiint\limits_{C_\varepsilon} \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1} \times$$
$$\times F_A^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi,\eta,\zeta,\varsigma\right)A_s\left[\ln r^2\right]udS. \qquad (4.3.16)$$

В (4.3.16) перейдем в сферические координаты при $n=4$

$$x = x_0+\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,\quad y = y_0+\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3,$$
$$z = z_0+\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3,\ t = t_0+\varepsilon\cos\theta_3,\ 0\le\theta_1<2\pi,\ 0\le\theta_2\le\pi,\ 0\le\theta_3\le\pi.$$

Тогда имеем

$$I_{11} = 2\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)k_1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(x_0+\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^n\left(y_0+\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^m\times$$
$$\times\left(z_0+\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^k\left(t_0+\varepsilon\cos\theta_3\right)^l\times\tilde{r}^{-2\alpha-2\beta-2\gamma-2\delta-3}\varepsilon^3\sin\theta_2\sin^2\theta_3\times \qquad (4.3.17)$$
$$\times u\left[\left(x_0+\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right),\left(y_0+\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right),\left(z_0+\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right),\left(t_0+\varepsilon\cos\theta_3\right)\right]$$
$$\times F_{As}^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi_s,\eta_s,\zeta_s,\varsigma_s\right)d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\varepsilon,$$

где к функции $F_{As}^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi_s,\eta_s,\zeta_s,\varsigma_s\right)$ была применена формула разложения (1.1.56)

$$
\begin{aligned}
&F_{As}^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi_s,\eta_s,\zeta_s,\varsigma_s\right)= \\
&=\sum_{k_2,k_3,k_4}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)_{k_2+k_3+k_4}(\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(\beta)_{k_2}(\gamma)_{k_3}(\delta)_{k_4}}{(2\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(2\beta)_{k_2}(2\gamma)_{k_3}(2\delta)_{k_4}k_2!k_3!k_4!}\times \\
&\times\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4)_{i+j+k}(\beta+k_2)_{i+j}(\gamma+k_3)_{i+k}(\delta+k_4)_{j+k}}{(2\beta+k_2)_{i+j}(2\gamma+k_3)_{i+k}(2\delta+k_4)_{j+k}\,i!j!k!} \\
&\times\xi_s^{k_2+k_3+k_4}F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4,\alpha+k_2+k_3+k_4;2\alpha+k_2+k_3+k_4;\xi_s\right) \\
&\times\eta_s^{k_2+i+j}F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j,\beta+k_2+i+j;2\beta+k_2+i+j;\eta_s\right) \\
&\times\zeta_s^{k_3+i+k}F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j+k,\gamma+k_3+i+k;2\gamma+k_3+i+k;\zeta_s\right) \\
&\times\varsigma_s^{k_4+j+k}F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j+k,\delta+k_4+j+k;2\delta+k_4+j+k;\varsigma_s\right).
\end{aligned}
$$

Используем формулу автотрансформации Больца в полученном разложении

$$
\begin{aligned}
&F_{As}^{(4)}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2;\alpha,\beta,\gamma,\delta;2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta;\xi_s,\eta_s,\zeta_s,\varsigma_s\right)= \\
&=\sum_{k_2,k_3,k_4}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)_{k_2+k_3+k_4}(\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(\beta)_{k_2}(\gamma)_{k_3}(\delta)_{k_4}}{(2\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(2\beta)_{k_2}(2\gamma)_{k_3}(2\delta)_{k_4}k_2!k_3!k_4!}\times \\
&\times\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4)_{i+j+k}(\beta+k_2)_{i+j}(\gamma+k_3)_{i+k}(\delta+k_4)_{j+k}}{(2\beta+k_2)_{i+j}(2\gamma+k_3)_{i+k}(2\delta+k_4)_{j+k}\,i!j!k!}\times \\
&\times\xi_s^{k_2+k_3+k_4}\eta_s^{k_2+i+j}\zeta_s^{k_3+i+k}\varsigma_s^{k_4+j+k}(1-\xi_s)^{-\alpha-k_2-k_3-k_4}(1-\eta_s)^{-\beta-k_2-i-j}(1-\zeta_s)^{-\gamma-k_3-i-k}(1-\varsigma_s)^{-\delta-k_4-j-k}\times \\
&\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4,\alpha+k_2+k_3+k_4;2\alpha+k_2+k_3+k_4;\frac{\xi_s}{\xi_s-1}\right) \\
&\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j,\beta+k_2+i+j;2\beta+k_2+i+j;\frac{\eta_s}{\eta_s-1}\right) \\
&\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j+k,\gamma+k_3+i+k;2\gamma+k_3+i+k;\frac{\zeta_s}{\zeta_s-1}\right) \\
&\times F\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j+k,\delta+k_4+j+k;2\delta+k_4+j+k;\frac{\varsigma_s}{\varsigma_s-1}\right),
\end{aligned}
$$

здесь

$$
\xi_s=-\frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\frac{4}{n+2}\right)^2\left(x_0{}^2+x_0\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{n+2}{2}},\ \eta_s=-\frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^2\left(y_0{}^2+y_0\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{m+2}{2}}
$$

$$
\zeta_s=-\frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\frac{4}{k+2}\right)^2\left(z_0{}^2+z_0\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{k+2}{2}},\qquad \varsigma_s=-\frac{1}{\tilde{r}^2}\left(\frac{4}{l+2}\right)^2\left(t_0{}^2+t_0\varepsilon\cos\theta_3\right)^{\frac{l+2}{2}},
$$

$$\tilde{r}^2 = \frac{4}{(n+2)^2}\left[\left(x_0 + \varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{n+2}{2}} - x_0^{\frac{n+2}{2}}\right]^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left[\left(y_0 + \varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{m+2}{2}} - y_0^{\frac{m+2}{2}}\right]^2$$

$$+\frac{4}{(k+2)^2}\left[\left(z_0 + \varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{k+2}{2}} - z_0^{\frac{k+2}{2}}\right]^2 + \frac{4}{(l+2)^2}\left[\left(t_0 + \varepsilon\cos\theta_3\right)^{\frac{l+2}{2}} - {}_0^{\frac{l+2}{2}}\right]^2.$$

После преобразований, получим

$$F_{As}^{(4)} = \tilde{r}^{2\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta}\left[\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{n+2}\right)^2\left(x_0^2 + x_0\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{n+2}{2}}\right]^{-\alpha}$$

$$\left[\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{m+2}\right)^2\left(y_0^2 + y_0\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{m+2}{2}}\right]^{-\beta}\left[\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{k+2}\right)^2\left(z_0^2 + z_0\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{k+2}{2}}\right]^{-\gamma}$$

$$\left[\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{l+2}\right)^2\left(t_0^2 + t_0\varepsilon\cos\theta_3\right)^{\frac{l+2}{2}}\right]^{-\delta} \times \mathrm{P},$$

где

$$\mathrm{P} = \sum_{k_2,k_3,k_4}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)_{k_2+k_3+k_4}(\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(\beta)_{k_2}(\gamma)_{k_3}(\delta)_{k_4}}{(2\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(2\beta)_{k_2}(2\gamma)_{k_3}(2\delta)_{k_4}\,k_2!k_3!k_4!}\times$$

$$\times\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4)_{i+j+k}(\beta+k_2)_{i+j}(\gamma+k_3)_{i+k}(\delta+k_4)_{j+k}}{(2\beta+k_2)_{i+j}(2\gamma+k_3)_{i+k}(2\delta+k_4)_{j+k}\,i!j!k!}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{n+2}\right)^2\left(x_0^2 + x_0\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{n+2}{2}}}\right]^{k_2+k_3+k_4}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{m+2}\right)^2\left(y_0^2 + y_0\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{m+2}{2}}}\right]^{k_2+i+j}\times$$

$$\times\left[1 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{k+2}\right)^2\left(z_0^2 + z_0\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{k+2}{2}}}\right]^{k_3+i+k}\left[1 - \frac{\tilde{r}^2}{\tilde{r}^2 + \left(\frac{4}{l+2}\right)^2\left(t_0^2 + t_0\varepsilon\cos\theta_3\right)^{\frac{l+2}{2}}}\right]^{k_4+j+k}\times$$

$$\times F\left(\alpha-\beta-\gamma-\delta-2,\alpha+k_2+k_3+k_4;2\alpha+k_2+k_3+k_4;1-\frac{\tilde{r}^2}{\left(\frac{4}{n+2}\right)^2\left(x_0^2+x_0\varepsilon\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{n+2}{2}}}\right)$$

$$\times F\left(-\alpha+\beta-\gamma-\delta-2-k_3-k_4,\beta+k_2+i+j;2\beta+k_2+i+j;1-\frac{\tilde{r}^2}{\left(\frac{4}{m+2}\right)^2\left(y_0^2+y_0\varepsilon\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{m+2}{2}}}\right)$$

$$\times F\left(-\alpha-\beta+\gamma-\delta-2-k_2-k_4-j,\gamma+k_3+i+k;2\gamma+k_3+i+k;1-\frac{\tilde{r}^2}{\left(\frac{4}{k+2}\right)^2\left(z_0^2+z_0\varepsilon\cos\theta_2\sin\theta_3\right)^{\frac{k+2}{2}}}\right)$$

$$\times F\left(-\alpha-\beta-\gamma+\delta-2-k_2-k_3-i,\delta+k_4+j+k;2\delta+k_4+j+k;1-\frac{\tilde{r}^2}{\left(\frac{4}{l+2}\right)^2\left(t_0^2+t_0\varepsilon\cos\theta_3\right)^{\frac{l+2}{2}}}\right).$$

(4.3.18)

В (4.3.18) перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{P}=&\sum_{k_2,k_3,k_4}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2)_{k_2+k_3+k_4}(\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(\beta)_{k_2}(\gamma)_{k_3}(\delta)_{k_4}}{(2\alpha)_{k_2+k_3+k_4}(2\beta)_{k_2}(2\gamma)_{k_3}(2\delta)_{k_4}k_2!k_3!k_4!}\\&\times\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4)_{i+j+k}(\beta+k_2)_{i+j}(\gamma+k_3)_{i+k}(\delta+k_4)_{j+k}}{(2\beta+k_2)_{i+j}(2\gamma+k_3)_{i+k}(2\delta+k_4)_{j+k}i!j!k!}\\&\times F(\alpha-\beta-\gamma-\delta-2,\alpha+k_2+k_3+k_4;2\alpha+k_2+k_3+k_4;1)\\&\times F(-\alpha+\beta-\gamma-\delta-2-k_3-k_4,\beta+k_2+i+j;2\beta+k_2+i+j;1)\\&\times F(-\alpha-\beta+\gamma-\delta-2-k_2-k_4-j,\gamma+k_3+i+k;2\gamma+k_3+i+k;1)\\&\times F(-\alpha-\beta-\gamma+\delta-2-k_2-k_3-i,\delta+k_4+j+k;2\delta+k_4+j+k;1).\end{aligned}\qquad(4.3.19)$$

В (4.3.19) вычислим значения гипергеометрических функций по формуле (1.1.13), тогда имеем

$$\begin{aligned}&F(\alpha-\beta-\gamma-\delta-2,\alpha+k_2+k_3+k_4;2\alpha+k_2+k_3+k_4;1)=\\&=\frac{\Gamma(2\alpha+k_2+k_3+k_4)\Gamma(\beta+\gamma+\delta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4)\Gamma(\alpha)},\end{aligned}$$

$$F\left(-\alpha+\beta-\gamma-\delta-2-k_3-k_4,\beta+k_2+i+j;2\beta+k_2+i+j;1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(2\beta+k_2+i+j\right)\Gamma\left(\alpha+\gamma+\delta+2+k_3+k_4\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_3+k_2+k_4+i+j\right)\Gamma\left(\beta\right)},$$

$$F\left(-\alpha-\beta+\gamma-\delta-2-k_2-k_4-j,\gamma+k_3+i+k;2\gamma+k_3+i+k;1\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(2\gamma+k_3+i+k\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+\delta+2+k_2+k_4+j\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\delta+\gamma+2+k_2+k_4+k_3+i+j+k\right)\Gamma\left(\gamma\right)}, \tag{4.3.20}$$

$$F\left(-\alpha-\beta-\gamma+\delta-2-k_2-k_3-i,\delta+k_4+j+k;2\delta+k_4+j+k;1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(2\delta+k_4+j+k\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+2+k_2+k_3+i\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2+k_2+k_3+k_4+i+j+k\right)\Gamma\left(\delta\right)}.$$

Подставим (4.3.20) в (4.3.19) и вычислим двойную сумму, используя свойства (1.1.3) и (1.1.8), получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{P}=\frac{\Gamma\left(2\alpha\right)\Gamma\left(2\beta\right)\Gamma\left(2\gamma\right)\Gamma\left(2\delta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+2\right)}. \tag{4.3.21}$$

Беря во внимание предыдущие вычисления и преобразования, из (4.3.17) получим следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{11}=4\pi^2k_1\frac{\Gamma\left(2\alpha\right)\Gamma\left(2\beta\right)\Gamma\left(2\gamma\right)\Gamma\left(2\delta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1\right)\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)\Gamma\left(\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{4}{n+2}\right)^{-2\alpha}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{-2\beta}\left(\frac{4}{k+2}\right)^{-2\gamma}\left(\frac{4}{l+2}\right)^{-2\delta}u\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right). \tag{4.3.22}$$

Учитывая значение коэффициента k_1 (3.3.2), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{11}=u\left(x_0,y_0,z_0,t_0\right). \tag{4.3.23}$$

Проводя подобные вычисления, мы убедимся в том, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}I_{12}=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{13}=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{14}=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{15}=\lim_{\varepsilon\to 0}I_{2}=0. \tag{4.3.24}$$

Рассмотрим второй интеграл из (4.3.9) $\iiint\limits_{C_\varepsilon}G_1A_s\left[u\right]dS$. Используя алгоритм, примененный в ходе вычисления (4.3.23), не сложно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{C_\varepsilon}G_1A_s\left[u\right]dS=0. \tag{4.3.25}$$

Таким образом, из (4.3.5) получаем решение задачи N (4.3.3). Теорема 4.3.1 доказана.

Замечание 4.3.1. Аналогичным способом можно построить функции Грина задачи D и смешанных задач ND_1, ND_2, ND_3, а также доказать единственность и существование решений перечисленных задач для вырождающегося эллиптического уравнения (H) в ограниченной области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы свойства гипергеометрических функций четырех переменных и применение их в решении краевых задач для четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка (H) в области $R_+^4 = \{(x,y,z,t): x>0, y>0, z>0, t>0\}$.

В подразделе 1.2 первого раздела для гипергеометрических функций четырех аргументов $F_2^{(4)}$, $F_3^{(4)}$, $F_5^{(4)},\dots,F_{11}^{(4)}$ записаны гипергеометрические системы дифференциальных уравнений в частных производных, даны для них линейно независимые решения в явном виде.

В подразделе 1.3 доказаны операторные тождества, записанные посредством взаимообратных операторов Чой-Хасанова $\mathrm{H}(a,b)$ и $\overline{\mathrm{H}}(a,b)$, для ряда гипергеометрических функций четырех переменных. Справедливость операторных тождеств доказана с помощью преобразований Меллина и интеграла Меллина-Бернса (Теорема 1.3.1). Применением полученных операторные тождества, формулы дифференцирования гипергеометрических рядов и свойств гипергеометрических рядов, доказаны разложения для этих рядов по произведениям таких известных гипергеометрических функций, как функции Аппеля F_1, F_2, F_4, Лауричеллы $F_C^{(3)}$, Сарана F_E, F_F, F_R, F_G (Теорема 1.3.2).

В подразделе 1.4 первого раздела с помощью взаимообратных операторов Берчнелла-Ченди $\nabla_{x,y}(c)$ и $\Delta_{x,y}(c)$ и Хасанова-Сриваставы $\tilde{\nabla}_{x;y,z,t}(c)$ и $\tilde{\Delta}_{x;y,z,t}(c)$ для гипергеометрических функций $F_1^{(4)},\dots,F_{15}^{(4)}$ получены операторные тождества, доказана справедливость этих тождеств (Теорема 1.4.1). В доказательстве формул разложения для указанных функций $F_1^{(4)},\dots,F_{15}^{(4)}$ применены найденные операторные тождества и другие формулы (Теорема 1.4.2).

Во втором разделе построено шестнадцать фундаментальных решений в явном виде для обобщенного уравнения Геллерстедта от четырех переменных (H) в неограниченной области R_+^4. Все фундаментальные решения выражаются гипергеометрическими функциями Лауричеллы $F_A^{(4)}$, отличающимися значениями параметров. Доказана лемма 2.1 о смежных соотношениях для многомерной гипергеометрической функции Лауричеллы $F_A^{(n)}$. Было установлено, что найденные фундаментальные решения имеют особенность порядка r^{-2} при $r \to 0$ (Теорема 2.1.1). С помощью формулы дифференцирования гипергеометрических функций было показано, что фундаментальные решения обладают определенными свойствами (Теорема 2.2.1).

В третьем разделе исследованы вопросы разрешимости краевых задач N^∞, D^∞, ND_1^∞, ND_2^∞, ND_3^∞ для вырождающегося эллиптического уравнения (H), доказана теорема единственности решения задач D^∞, ND_1^∞, ND_2^∞, ND_3^∞

посредством принципа максимума (Теорема 3.2.1), теорема единственности решения задачи N^{∞} доказана с помощью метода интегралов энергии, доказаны теоремы существования решений рассматриваемых задач (Теоремы 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5). Решения представлены в явном виде и содержат гипергеометрические функции Лауричеллы трех аргументов.

В четвертом разделе дана постановка задачи N для обобщенного четырехмерного уравнения Геллерстедта (H) в ограниченной области. С помощью метода интегралов энергии доказана теорема единственности решения задачи (4.2.1). Определена функция Грина задачи N (Определение 4.3.1), доказано существование решения задачи (Теорема 4.3.1), выраженное через функцию Грина $G_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$, которая является суммой фундаментального решения $g_1(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$ и регулярного решения $g_1^*(x,y,z,t;x_0,y_0,z_0,t_0)$. В доказательстве существования решения использовались формулы дифференцирования разложения гипергеометрических функций, формула автотрансформации Больца и др.

Полученные результаты могут быть использованы в развитии фундаментальных основ теории гипергеометрических функций, в теории вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Appell P., Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite. – Paris: Gauthier–Villars, 1926. – 440 p.

2 Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G., Higher Transcendental Functions. – New York, Toronto and London: McGraw-Hill, 1953. – Vol. I. – 302 p.

3 Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1940. – Vol.11, No. 1. – P. 249–270.

4 Burchnall J.L., Chaundy T.W. Expansions of Appell's double hypergeometric functions (II) // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1941. – Vol.12, No. 1. – P. 112–128.

5 Chaundy T.W. Expansions of hypergeometric functions // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1942. – Vol.13, No. 1. – P. 159–171.

6 Hasanov A., Srivastava H. M. Some decomposition formulas associated with the Lauricella function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric functions // Appl. Math. Lett. – 2006. – Vol.19, No. 2. – P.113–121.

7 Hasanov A., Srivastava H. M., Turaev M. Decomposition formulas for some triple hypergeometric functions // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – Vol.324, No. 2. – P. 955–969.

8 Hasanov A., Srivastava H.M. Decomposition formulas associated with the Lauricella multivariable hypergeometric functions // Comput. Math. Appl. – 2007. – Vol. 53, No. 7. – P.1119–1128.

9 Choi J., Hasanov A. Applications of the operator $H(\alpha,\beta)$ to the Humbert double hypergeometric functions // Comput. Math. Appl. – 2011. – Vol.61, No. 3. – P. 663–671.

10 Hasanov A., Turaev M., Choi J. Decomposition formulas for the generalized hypergeometric ${}_4F_3$ function // Honam Math. J. – 2010. – Vol.32, No. 1. – P.1–16.

11 Tricomi F. G. Sulle Equazioni Lineari alle derivate Parziali di 2º Ordine, di Tipo Misto // Atti Accad. Naz. dei Lincei. – 1923. – Vol.14, No. 5. – P.133–247.

12 Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. – М.: Наука, 1973, – 712 с.

13 Бицадзе А.Б. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

14 Бицадзе А.Б. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 204 с.

15 Бицадзе А.Б. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

16 Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour une equation linèaire aux derives partieles du second ordre de tipe mixte. – Uppsala: Thèsis, 1935. – 92 s.

17 Gellerstedt S. Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte // Arkiv Mat., Astr. och Fysik. –1937. –Vol.B 25A, No. 29. – P. 1–23.

18 Gellerstedt S. Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv Mat., Astr. Och Fysik. –1937. – Vol. B 26A, No. 3. – P. 1–32.

19 Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

20 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с.

21 Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1974. – 156 с.

22 Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типа. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

23 Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.

24 Алдашев С.А. Корректность локальной краевой задачи в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. – 2016. – № 1-2. – С. 7–17.

25 Бердышев А.С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики // Дифференц. Уравнения. – 1993. – Т.29, № 12. – С. 2118–2125.

26 Berdyshev A.S., Kadirkulov B.J. A Samarskii-Ionkin problem for two-dimensional parabolic equation with the caputo fractional differential operator // Int. J. Pure Appl. Math. – 2017. – Vol. 113, No. 4. – P. 575–586.

27 Berdyshev A.S., Karimov E.T., Rakhmatullaeva N.A. Unique solvability of a non-local problem for mixed-type equation with fractional derivative // Math. Method Appl. Sci. – 2017. – Vol. 40, No. 8. – P. 2994–2999.

28 Berdyshev A., Sultanov M.A. On Stability of the Solution of Multidimensional Inverse Problem for the Schrödinger Equation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2017. – Vol. 12, No. 3. – P. 119–133.

29 Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E. On the Existence of Eigenvalues of a Boundary Value Problem with Transmitting Condition of the Integral Form for a Parabolic-Hyperbolic Equation // Mathematics. – 2020. –Vol. 8, No. 1030. – P. 1–13.

30 Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сиб. Матем. Журн. – 2008. – Т.49, №3. – С. 423–428.

31 Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Дифференц. Уравнения. – 2016. – Т.52, №12. – С.1666–1681.

32 Tasmambetov Z.N., Zhakhina R.U. Solution of degenerate hypergeometric system of Horn consisting of three equations // Inter. Conf. Funct. Anal. Interdiscip. Appl.: AIP Conf. Proc. – Astana, 2017. – Vol. 1880, No. 1. https://doi.org/10.1063/1.5000626.

33 Tasmambetov Z.N., Talipova M.Z. Construction of normal-regular decisions of Bessel typed special system // Inter. Conf. Funct. Anal. Interdiscip.

Appl.: AIP Conf. Proc. – Astana, 2017. – Vol. 1880, No. 1. – P. 1666–1681. https://doi.org/10.1063/1.5000629.
34 Tasmambetov Z. Confluent hypergeometric functions and two variables Laguerre polynomials as a solutions of Wilczynski type system // Inter. Conf. Anal. Appl. Math.: AIP Conf. Proc. – Almaty, 2016. – Vol. 1759, No. 1. https://doi.org/10.1063/1.4959751.
35 Tasmambetov Zh. N., Issenova A.A. Bessel functions of two variables as solutions for systems of the second order differential equations // Bullet. Karaganda Univ. Math. ser. – 2020. – Vol. 98, No. 2. – P. 141–152.
36 Assanova, A. T. On a Nonlocal Problem with Integral Conditions for the System of Hyperbolic Equations // Differ. Equ. –2018. –Vol. 54, No. 2. – P. 201–214.
37 Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. - New York: Wiley, 1958. – 176 p.
38 Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. – Киев: АН УССР, 1963. – 287 с.
39 Коган М.Н. О магнитогидродинамических течениях смешанного типа // Прикл. матем. и мех. – 1961. – Т. 25, № 1. – С. 132–137.
40 Смарт У.М. Небесная механика. – М.: Мир, 1965, – 504 с.
41 Brown R.T. Electronic Interaction Integrals for Atoms Calculated with Laguerre Polynomial Radial Wave functions // J. Chem. Phys. – 1967. – Vol. 46, No. 5. – P. 1551–1552.
42 Luke Y.L. The Special Functions and Their Approximations. – New York-London: Acad. Press, 1969. – Vol. 1. – 349 p.
43 Mathai A.M., Saxena R.K. Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. Lect. Notes Math., 1973. – Vol. 348. – 318 p.
44 Sneddon I.N. Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, third ed. – London, New York: Longman, 1980. – 182 p.
45 Srivastava H.M., Kashyap B.R.K. Special Functions in Queuing Theory and Related Stochastic Processes. – New York, London, San Francisco: Academic Prees, 1982. – 308 p.
46 Rassias J.M. A maximum principle in R^{n+1} // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – Vol. 85, No 1. – P. 106–113.
47 Niukkanen A.W. Generalised hypergeometric series ${}^{N}F\left(x_1,...,x_N\right)$ arising in physical and quantum chemical applications // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. –Vol. 16. – P. 1813–1825.
48 Candelas P., de la Ossa X., Greene P., Parkes L. A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble super conformal theory // Nucl. Phys. – 1991. – Vol. B539. – P. 21–74.
49 Passare M., Tsikh A., Zhdanov O. A multidimensional Jordan residue lemma with an application to Mellin-Barnes integrals // Aspects Math. – 1994. – Vol. E.26. – P. 233–241.

50 Varchenko A. Multidimensional Hypergeometric Functions and Representation Theory of Lie Algebras and Quantum Groups. Advanced Series in Mathematical Physics. World Scientific. 1995. – Vol. 21. – 384 p.

51 Виноградов Ю.И., Константинов М.В. Расчет сферического бака при локальном воздействии // Известия РАН. Сер. Механика твердого тела. – 2016. – № 2. – С. 109–120.

52 Аманов Д. Краевые задачи для уравнения $sign\, y\left|y\right|^m u_{xx} + x^n u_{yy} = 0$ в неограниченной области // Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. – 1984. – № 2. – С. 8–10.

53 Hasanov A. Some solutions of generalized Rassias's equation // Intern. J. of Appl. Math. Stat. –2007. – Vol. 8, No. M07. – P. 20–30.

54 Hasanov A. The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson-Darboux equation // Intern. J. of Appl. Math. Stat. – 2007. – Vol. 8, No. M07. – P. 30–43.

55 Hasanov A. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Var. Elliptic Equ. – 2007. –Vol. 52, No. 8. – P. 673–683.

56 Salakhitdinov M.S., Hasanov A. A solution of the Neumann-Dirichlet boundary-value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Complex Var. Elliptic Equ. – 2008. – Vol.53, No. 4. – P. 355–364.

57 Hasanov A., Karimov E.T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // Appl. Math. Lett. – 2009. – Vol.22. – P. 1828–1832.

58 Karimov E.T. On a boundary problem with Neumann's condition for 3D singular elliptic equations // Appl. Math. Lett. – 2010. – Vol.23. – P. 517–522.

59 Urinov A.K., Karimov E.T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // Appl. Math. Lett. –2011. –Vol. 24. – P.314–319.

60 Эргашев Т.Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Вестн. Том. гос. ун-та. Мат. и мех. – 2017. – № 50. – С. 45–56.

61 Ergashev T.G. Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // Ufa Math. J. – 2018. – V.10. No. 4. – P. 111–121.

62 Berdyshev A.S., Hasanov A., Ergashev T.G. Double-Layer Potentials for a generalized Bi-Axially Symmetric Helmholtz Equation. II // Complex Var. Elliptic Equ. –2020. – V. 65, No. 2. – P. 316 – 332.

63 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

64 Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // J. Math. Ann. – 1931. – Vol. 105. – P. 381–407.

65 Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // J. Math. Ann. – 1935. – Vol. 111. – P. 638–677.

66 Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // J. Math. Ann. – 1937. – Vol. 113. – P. 242–291.

67 Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen im Schnittpunkt dreier Singularitäten // J. Math. Ann. – 1938. – Vol. 115. – P. 435–455.

68 Horn J. Über eine hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // Monatsh. Math. Phys. – 1939. – Vol. 47. – P. 359–379.

69 Horn J. Über hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen // J. Math. Ann. –1940. – Vol. 117. – P. 384–414.

70 Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen // J. Math. Ann. –1889. – Vol. 34. – P. 544–600.

71 Srivastava H.M., Manocha H.L. A Treatise on Generating Functions. – Chichester: Ellis Horwood, – New York: Halsted Press,1984. – 572 p.

72 Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. – Chichester: Ellis Horwood, – New York: Halsted Press, 1985, – 425 p.

73 Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rend. Circ. Matem. – 1893. – Vol.7. – P.111–158.

74 Saran S. Relations between functions contiguous to certain hypergeometric functions of three variables // Ganita. – 1954. – Vol.5. – P. 69–76.

75 Saran S. Transformations of certain hypergeometric functions of three variables // Acta Math. –1955. – Vol.93, No. 3–4. – P. 292–312.

76 Srivastava H.M. Hypergeometric functions of three variables // Ganita. – 1964. – Vol.15. – P. 97–108.

77 Srivastava H.M. Some integrals representing triple hypergeometric functions // Rend. Circ. Mat. Palermo. – 1967. – Vol.16, Ser. 2. – P. 99–115.

78 Srivastava H.M. Certain pairs of inverse series relations // J. Reine Angew. Math. – 1970. – Vol.245. – P. 47–54.

79 Exton H. Certain hypergeometric functions of four variables // Bull. Soc. Math. Grece. – 1972. – Vol.13. – P.104–113.

80 Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – Chichester, New York: Ellis Horwood, 1976. – 312 p.

81 Sharma C., Parihar C.L. Hypergeometric functions of four variables (I) // J. Indian Acad. Math. –1989. – Vol. 11, No. 2. – P. 121–133.

82 Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для гипергеометрической функции от четырех переменных F10,4 // Пробл. оптимиз. сложн. сист.: матер. XIV междунар. Азиатской школы-семинара. – Иссык-Куль, 2018. – С.171–175.

83 Хасанов А.Х., Рыскан А.Р., Бердышев А.С. Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для гипергеометрической функции от четырех переменных F5,4 // Информат. и прикл. матем.: матер. III междунар. науч.-практ. конф., посв. 80-летию проф. Бияшева Р.Г. и 70-летию проф. Айдарханова М.Б. – Алматы, 2018. – С.384–389.

84 Хасанов А.Х., Рыскан А.Р., Бердышев А.С. Решение системы дифференциальных уравнений гипергеометрической функции четырех переменных F11,4 // Матем. модел. и информ. техн. в образ. и науке: матер. VIII междунар. науч.-метод. конф., посв. 90-летию КазНПУ им. Абая. – Алматы, 2018. – С. 117–120.

85 Рыскан А.Р. Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для некоторых гипергеометрических функций от четырех переменных // Нелок. кр. задачи и родств. пробл. матем. биол., информ. и физ.: V междунар. науч. конф. – Нальчик, 2018. – С. 178.

86 Хасанов А., Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Формулы разложения некоторых гипергеометрических рядов Гаусса от четырех переменных второго порядка. // Соврем. методы теор. кр. задач: тезисы докл. междунар. конф. ВВМШ Понтрягинские чтения – XXXI, посв. памяти Ю.В. Покорного. – Воронеж, 2020. – С. 225–227.

87 Рыскан А.Р. Формулы разложения с операторами H Гипергеометрических рядов Гаусса от четырех переменных второго порядка // Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки. – 2020. – №3(71). – С. 79-84.

88 Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Decomposition formulas for some quadruple hypergeometric series // Bullet. Karaganda Univ. Math. ser. – 2020. – No. 4 (100), – P. 43–54.

89 Poole E.G. Introduction to the Theory of Linear Differential Equations. Oxford: Clarendon Press, 1936. – 212 p.

90 Singhal J.P., Bhati S.S. Certain expansions associated with hypergeometric functions of n variables // Glasnik Mat. Ser.III. – 1976. – Vol.11, №31. – P. 239–245.

91 Exton H. Some integral representations and transformations of hypergeometric functions of four variables // Bull. Soc. Math. Grece. – 1973. –Vol. 14. – P.132–140.

92 Marichev O.I. Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables. – Chichester: Ellis Horwood, 1983. – 336 p.

93 Hasanov A., Berdyshev A.S., Ryskan A. Fundamental solutions for a class of four-dimensional degenerate elliptic equation // Complex Var. Elliptic Equ. – 2020. – Vol. 65, No. 4, – P. 632–647.

94 Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. –1100 с.

95 Хасанов А.Х., Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Краевая задача для одного класса четырехмерного вырождающегося эллиптического уравнения // Соврем. методы теор. кр. задач: тезисы докл. междунар. конф. ВВМШ Понтрягинские чтения – XXX. – Воронеж, 2019. – С. 287–289.

96 Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Разрешимость краевой задачи со смешанными условиями для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка // Inverse problems in finance, economics and life sciences: Матер. Междунар. науч. Конф. – Алматы, 2019. – С. 19.

97 Бердышев А.С., Хасанов А.Х., Рыскан А.Р. Решение задачи Неймана-Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения // Информ. и прикл. матем.: Матер. IV междунар. науч.-практ. конф., посв. 70-летию проф. Биярова Т.Н., Вуйцика В. и 60-летию Амиргалиева Е.Н. – Алматы, 2019. – С. 197–204.

98 Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Корректная разрешимость краевой задачи со смешанными условиями для вырождающегося четырехмерного

эллиптического уравнения // Неклассич. уравн. матем. физики и их прилож.: тезисы докл. Узбекско-Российской науч. конф. – Ташкент, 2019. – С. 103–104.

99 Рыскан А.Р. Решение задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка // Вестник КазНПУ им.Абая. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – № 4 (68). – С. 92–98.

100 Бердышев А.С., Рыскан А.Р. Корректная разрешимость краевой задачи с условиями Неймана-Дирихле для вырождающегося четырехмерного эллиптического уравнения // Соврем. пробл. дифференц. ур. и смежных разделов матем.: тезисы докл. междунар. науч. конф. –Фергана, 2020. –С.45–48.

101 Berdyshev A.S., Ryskan A. The Neumann and Dirichlet problems for one four-dimensional degenerate elliptic equation // Lobachevskii J. Math. – 2020. – Vol. 41, No. 6, – P. 1051–1066.

102 Berdyshev A.S., Hasanov A., Ryskan A.R. Solution of the Neumann problem for one four-dimensional elliptic equation. // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol.11, No. 2. – P. 93–97.

103 Бердышев А.С., Хасанов А.Х., Рыскан А.Р. Краевая задача со смешанными условиями Неймана-Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения // Соврем. методы матем. физики и их приложения: тезисы докл. Республ. науч. конф. с участ. заруб. ученых. – Ташкент, 2020. – С. 370–374.